Algebra gyakorló feladatok

1. Feladat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ -1 \end{bmatrix}$$

Adjuk meg azon α és β értékeket, amelyekre az $A \cdot x = b$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

Útmutatás. $\alpha = 0$ és $\beta = -1$

2. Feladat

Adjuk meg a fenti A mátrix rangját az α paraméter függvényében.

Útmutatás. $\operatorname{rank} A = 3$, ha $\alpha \neq 0$ és $\operatorname{rank} A = 2$, ha $\alpha = 0$

3. Feladat

Adjuk meg az alábbi A szimmetrikus mátrix D diagonális alakját és azt az U ortogonális mátrixot, amelyre $U^T A U = D$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Útmutatás.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

4. Feladat

Állítsuk elő az alábbi függvény érintősíkját a $P(2, 1, 4)$ pontban

$$f(x, y) = 2y^2 \sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2$$

Útmutatás.

$f'_1(2, 1) = 4/3$

$f'_2(2, 1) = 38/3$

Az érintősík egyenlete: $4(x - 2) + 38(y - 1) - 3(z - 4) = 0$.

5. Feladat

Keressük meg az alábbi függvény kritikus pontjait:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{xy}{8} - 2z^2$$

Útmutatás. Az egyetlen kritikus pont: $P(2, 2, 0)$, az alábbi egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} f'_1(x, y, z) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{y}{8} = 0 \\ f'_2(x, y, z) &= -\frac{1}{y^2} + \frac{x}{8} = 0 \\ f'_1(x, y, z) &= -4z = 0 \end{aligned}$$

6. Feladat

Adjuk meg a függvény Hesse-mátrixát mindegyik kritikus pontban, és állapítsuk meg a kritikus pontok mindegyikéről, hogy ott minimum, maximum vagy nyeregpont van-e.

Megoldás:

$$H = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

A Hesse-mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1/8$, $\lambda_2 = 3/8$ és $\lambda_3 = -4$, ezért a mátrix indefinit, tehát a kritikus pont *nyeregpont.*

7. Feladat

Jelöljük meg, hogy melyik állítás igaz, és melyik hamis: **H I H H**

- Ha az $A \cdot x = b$ egyenletrendszer megoldható, akkor A oszlopai lineárisan függetlenek.
- Bármely négyzetes mátrixra $\det A) \cdot \det A^T) \geq 0$.
- Ha az a_1, a_2, a_3 vektorok lineárisan függetlenek, és $b_1 = a_1 + a_2$, $b_2 = a_1 + a_2 + a_3$ és $b_3 = a_2 + a_3$, akkor a b_1, b_2, b_3 vektorok is lineárisan függetlenek.
- Ha az f kétszer folytonosan differenciálható függvénynek az x_0 pont lokális minimumhelye, akkor ott a Hesse-mátrix pozitív definit.

8. Feladat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ -1 \end{bmatrix}$$

Adja meg mindazon α és β paramétereket, amelyekre az $A \cdot x = b$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

Útmutatás. $\alpha \neq 0$ és β tetszőleges.

9. Feladat

Tekintsük a 8. Feladatban szereplő A mátrixot.

(a) Adjuk meg mindazon α értékeket, amelyekre $\det A \neq 0$.

(b) Adja meg $\operatorname{rank} A$ és $\deg A$ értékeit az α paraméter segítségével.

Útmutatás. (a) $\alpha \neq 0$.

(b) Ha $\alpha \neq 0$, akkor $\operatorname{rank} A = 3$ és $\deg A = 0$. Ha $\alpha = 0$, akkor $\operatorname{rank} A = 2$ és $\deg A = 1$.

10. Feladat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$$

Állapítsuk meg, hogy vannak-e olyan α és β értékek, amelyekre az $A \cdot x = b$ egyenletrendszer megoldható.

Útmutatás. $\alpha = 0$ és $\beta = -1$

11. Feladat

Adjuk meg az alábbi A szimmetrikus mátrix D diagonális alakját és azt az U ortogonális mátrixot, amelyre $U^T AU = D$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Útmutatás.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

12. Feladat

Tegyük fel, hogy az $a+b$ és az $2a-2b$, illetve a b és a $6a+3b$ vektorok egymásra merőlegesek. Milyen szöget zár be a és b, ha egyik sem nullvektor?

13. Feladat

Az $e^{-xy}+2x+3xy=3$ egyenletű síkbeli görbe $(p,0)$ pontjában húzott érintő iránytangense -1. Mit mondhatunk a p paraméter értékéről?

14. Feladat

Adja meg az alábbi függvény gradiensét a $(0,1,0)$ pontban.

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\ln(ye^x)$$

15. Feladat

Adjuk meg az $f(x,y)=(4x^2-2y^3)\sqrt{x^2+y^2+2}$ felület érintősíkjának egyenletét az $(1,1,4)$ pontban

16. Feladat

Legyen $A=[a_1,a_2,a_3]$ egy harmadrendű kvadratikus mátrix. Adjuk meg $\det A$ segítségével a

$$B=[a_2+a_3, a_1+a_3, a_1+a_2]$$

mátrix determinánsának értékét.

17. Feladat

Keressük meg az alábbi függvény kritikus pontjait:

$$f(x,y,z)=x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}+e^{z^2}$$

Útmutatás.

$$\begin{aligned} f_1'(x,y,z) &= -\frac{1}{x^2}+\frac{y}{8}=0 \\ f_2'(x,y,z) &= -\frac{1}{y^2}+\frac{x}{8}=0 \\ f_1'(x,y,z) &= -4z=0 \end{aligned}$$

Az egyetlen kritikus pont: $P(2,2,0)$

18. Feladat

Adjuk meg a fenti függvény Hesse-mátrixát mindegyik kritikus pontban, és döntsük el, hogy ott minimum, maximum vagy nyeregpont van-e.

Útmutatás.

$$H = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

19. Feladat

Legyen $f(x,y) = x - 3y$. Adjuk meg az

$$\begin{array}{l} f(x,y) \to \max(\min) \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array}$$

feltételes szélsőérték feladat megoldását.

20. Feladat

Adjuk meg az alábbi A szimmetrikus mátrix D diagonális alakját és azt az U ortogonális mátrixot, amelyre $U^T AU = D$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Útmutatás.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

21. Feladat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ \beta \end{bmatrix}$$

Állapítsuk meg, hogy vannak-e olyan α és β értékek, amelyekre az $A \cdot x = b$ egyenletrendszer egyértelműen oldható meg.

Útmutatás. $\alpha = 0$ és $\beta = -1$

22. Feladat

Adjuk meg az alábbi A szimmetrikus mátrix D diagonális alakját és azt az U ortogonális mátrixot, amelyre $U^T AU = D$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Útmutatás.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

23. Feladat

Keressük meg az alábbi függvény kritikus pontjait:

$$f(x,y,z) = (2x^2 + y^2)e^{-z}$$

Útmutatás. Az egyetlen kritikus pont: $P(2,2,0)$, ugyanis:

$$\begin{aligned} f_1'(x,y,z) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{y}{8} = 0 \\ f_2'(x,y,z) &= -\frac{1}{y^2} + \frac{x}{8} = 0 \\ f_1'(x,y,z) &= -4z = 0 \end{aligned}$$

24. Feladat

Adjuk meg a fenti függvény Hesse-mátrixát mindegyik kritikus pontban, és döntsük el, hogy ott minimum, maximum vagy nyeregpont van-e.

Útmutatás.

$$H = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

25. Feladat

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$$

Állapítsuk meg, hogy vannak-e olyan α és β értékek, amelyekre az $A \cdot x = b$ egyenletrendszer megoldható.

Útmutatás. $\alpha = 0$ és $\beta = -1$

26. Feladat

Adjuk meg az alábbi A szimmetrikus mátrix D diagonális alakját és azt az U ortogonális mátrixot, amelyre $U^T AU = D$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Útmutatás.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

27. Feladat

Keressük meg az alábbi függvény kritikus pontjait:

$$f(x, y, z) = x \cdot e^x + \sqrt{1 + y^2 + z^2}$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} f_1'(x, y, z) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{y}{8} = 0 \\ f_2'(x, y, z) &= -\frac{1}{y^2} + \frac{x}{8} = 0 \\ f_1'(x, y, z) &= -4z = 0 \end{aligned}$$

Az egyetlen kritikus pont: $P(2, 2, 0)$

28. Feladat

Adjuk meg a fenti függvény Hesse-mátrixát mindegyik kritikus pontban, és döntsük el, hogy ott minimum, maximum vagy nyeregpont van-e.

Útmutatás.

$$H = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

29. Feladat
Vizsgáljuk meg, hogy függetlenek-e az alábbi vektorok, és adjuk meg

$$\dim \operatorname{lin}\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

értékét, ahol

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

30. Feladat
Tekintsük az alábbi vektorokat:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

és döntsük el, hogy igaz-e a $b \in \operatorname{lin}\{a_1, a_2, a_3\}$ reláció?

31. Feladat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$$

Adjuk meg azon α és β értékeket, amelyekre az $Ax = b$ inhomogén egyenletrendszernek
(a) végtelen sok megoldása van,
(b) nincs megoldása,
(c) pontosan egy megoldása van.

32. Feladat
Tekintsük az alábbi lineáris transzformációt:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

és adjuk meg az A rangját és a sajátértékeinek szorzatát!