Analízis gyakorló feladatok

1. Feladat

Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatot monotonitás, korlátosság és határérték szempontjából:

$$a_n = \frac{2n-1}{2n+3}$$

Útmutatás. Végezzük el a következő átalakítást:

$$a_n = \frac{2n+3-4}{2n+3} = 1 - \frac{4}{2n+3}\,.$$

Innen azonnal látható, hogy a sorozat szigorúan monoton növő, felső korlátja 1 (és ez a legkisebb), valamint a határértéke is 1, azaz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

2. Feladat

Keressük meg a következő sorozat határértékét:

$$a_n = \frac{5n^2-3n+6}{3n^2+9n-4}$$

Útmutatás. Emeljük ki a számlálóból és a nevezőből is az n legmagasabb hatványát, azaz n^2-et. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{5-3/n+6/n^2}{3+9/n-4/n^2}$$

Itt az első tényező 1, míg a második tényezőben a számláló határértéke 5, a nevező határértéke 3. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{3}$$

3. Feladat

Tekintsünk most egy paraméterekkel megadott sorozatot, és adjuk meg a határértékét:

$$a_n = \frac{\alpha_k n^k + \alpha_{k-1}n^{k-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_m n^m + \beta_{m-1}n^{m-1} + \ldots + \beta_0}$$

ahol az α_k és β_m paraméterek egyike sem nulla.

Útmutatás. Az előző feladat gondolatmenete alapján a számlából és a nevezőből is emeljük ki az n legmagasabb hatványát. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{n^k}{n^m}\cdot\frac{\alpha_k + \alpha_{k-1}/n + \ldots + \alpha_0/n^k}{\beta_m + \beta_{m-1}/n + \ldots + \beta_0/n^m}$$

Vegyük észre, hogy a második tényező határértéke α_k/β_m, hiszen mind a számlálóban, mind a nevezőben az első konstans tagon kívül az összes többi tag nullához tart.

Tehát a következőt állíthatjuk:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{ha } k < m \\ \frac{\alpha_k}{\beta_m} & \text{ha } k = m \\ +\infty & \text{ha } k > m \text{ és } \alpha_k/\beta_m > 0 \\ -\infty & \text{ha } k > m \text{ és } \alpha_k/\beta_m < 0 \end{cases}$$

4. Feladat
Adjuk meg a következő sorozat határértékét:

$$a_n = \frac{-5n^3 + 3n^2 - 8n + 6}{3n^2 - 12n + 21}$$

Útmutatás. Az előző feladat eredménye alapján itt $k > m$, továbbá a legmagasabb hatványok együtthatóinak hányadosa negatív, ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

5. Feladat
Vizsgáljuk meg a következő sorozat monotonitását, korlátosságát és határértékét:

$$a_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$$

Útmutatás. A különbség mindkét tagja végtelenhez tart, ezért végezzük el a következő átalakítást:

$$a_n = (\sqrt{n^2+2} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2+2}+n}{\sqrt{n^2+2}+n} = \frac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n} = \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} < \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$$

Innen a Rendőr-elv alapján már látjuk, hogy a sorozat nullához tart. Az is könnyen látható, hogy a sorozat szigorúan monoton fogyó, és a (legnagyobb) alsó korlátja nulla.

6. Feladat
Képezzük rekurzív módon a következő sorozatot: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, és így tovább

$$a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}}$$

ahol az a_n előállításában n számú gyökjel szerepel. Rekurzív módon a sorozat egy eleméből, így állítjuk elő a következőt:

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$$

Döntsük el, hogy a sorozat monoton-e, korlátos-e, és keressük meg a határértékét!

Útmutatás. Könnyen látható, hogy a sorozat szigorúan monoton növő, hiszen bármelyik elemből a megelőző sorozatelemet az utolsó $\sqrt{2}$ törlésével nyerjük.
Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a sorozat felülről korlátos, és a 2 egy felső korlát. Valóban, elsőre $a_1 < 2$. Ha most az $n-1$-ik elemre $a_{n-1} < 2$, akkor az n-ikre az adódik, hogy

$$a_n^2 = 2 + a_{n-1} < 4$$

azaz tényleg $a_n < 2$ minden n mellett.
Ezek alapján a sorozat konvergens, és jelölje az egyelőre ismeretlen (pozitív) határértékét A, azaz $a_n \to A$. A sorozat rekurzív képzési szabálya szerint $n \geq 2$ esetén

$$a_n^2 = 2 + a_{n-1}$$

ahol $a_n^2 \to A^2$, és $2 + a_{n-1} \to 2 + A$. Mivel a két oldal minden n-re egyenlő, azt kapjuk, hogy

$$A^2 = 2 + A$$

Ennek az egyenletnek az egyetlen pozitív megoldása $A = 2$, tehát

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

FIGYELEM!
A megoldás első két lépésében a monotonitás és korlátosság igazolása nagyon fontos lépés, enélkül ugyanis a sorozat nem lenne feltétlenül konvergens. Ha például azt a sorozatot néznénk, amelyben $a_1 = 1$, és

$$a_n = 2a_{n-1}$$

akkor innen csak az ismeretlen A-ra vonatkozó egyenletre ugorva azt kapnánk, hogy

$$A = 2A$$

aminek egyetlen megoldása $A = 0$, és így a határérték nulla lenne. Holott ez a sorozat nem korlátos, hiszen az explicit alakja

$$a_n = 2^{n-1}$$

és ez nyilvánvalóan nem konvergens, végtelenbe tart.

7. Feladat

Határozzuk meg a következő sorozat határértékét:

$$a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{n+1}$$

Útmutatás. Osszuk el a zárójelen belül álló tört számlálóját és nevezőjét is $2n$-nel:

$$a_n = \left(\frac{1 + \frac{1/2}{n}}{1 + \frac{3/2}{n}} \right)^{n+1} = \frac{\left(1 + \frac{1/2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{3/2}{n}\right)^n} \cdot \frac{1 + \frac{1/2}{n}}{1 + \frac{3/2}{n}}$$

Itt az első tényező számlálójának határértéke $e^{1/2}$, a nevező határértéke $e^{3/2}$, továbbá a második tényező határértéke nyilván 1, ezért

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{e^{1/2}}{e^{3/2}} = \frac{1}{e}$$

8. Feladat

Keressük meg a következő sorozat határértékét:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$

Útmutatás. A sorozat úgy is felírható, hogy

$$a_n = \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right]^n$$

Mivel a szögletes zárójelen belüli sorozat határértéke $1/e \approx 0.367891...$, azért valamely N indextől kezdve fennáll, hogy

$$0.3 < \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n < 0.4$$

minden $n \geq N$ esetén. Mindegyik oldalt n-ik hatványra emelve

$$0.3^n < \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right]^n < 0.4^n$$

Mivel itt mind az alsó becslés, mind a felső becslés nullához tart, a Rendőr-elv alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

9. Feladat

Határozzuk meg az $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat határértékét!

Útmutatás.

Figyelem, ez a sorozat nem monoton, tessék számolással ellenőrizni!

Mindenesetre a sorozat minden eleme nagyobb 1-nél, ezért úgy írjuk fel, hogy

$$a_n = \sqrt[n]{n} = 1 + h_n$$

ahol $h_n > 0$ minden n-re más és más. Emeljük mind a két oldalt n-ik hatványra:

$$n = (1+h_n)^n > 1 + \binom{n}{2} h_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$$

ahol a jobb oldalon az n-ik hatvány Binomiális-tétel szerinti kifejtéséből csak az első és a harmadik tagot tartottuk meg, a többi pozitív tagot elhagytuk. Az egyenlőtlenséget rendezve azt kapjuk, hogy

$$0 < h_n^2 < \frac{2}{n}$$

ahonnan a Rendőr-elv alapján azonnal következik, hogy $h_n^2 \to 0$, és így $h_n \to 0$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

FIGYELEM!
Tessék ellenőrizni, hogy a Binomiális-tétel szerinti kifejtésnél a becslésben csak az első két tagot nem lett volna elegendő megtartani, szükség van a négyzetes tagra is.

10. Feladat
Adjuk meg az alábbi sorozat határértékét:

$$a_n = \frac{4^{n+1} - 2\cdot 6^n + 5\cdot 3^n}{3\cdot 6^n - 7\cdot 5^{n+1} + 2^n}$$

Útmutatás. Emeljük ki a számlálóból és a nevezőből is a legnagyobb alapú hatványt, azaz a 6^n-t. Azt kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{4\cdot(4/6)^n - 2 + 5\cdot(3/6)^n}{3 - 35\cdot(5/6)^n + (2/6)^n}$$

Itt a számláló határértéke -2, hiszen a többi tag nullához tart. Hasonlóan a nevező határértéke 3, hiszen a másik két tag nullához tart. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{2}{3}$$

11. Feladat
Határozzuk meg a következő sor összegét:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{3^k}$$

Útmutatás. Ha a szummából kiemelünk 4-et, akkor éppen a 2/3 kvóciensű mértani sorhoz tagjaihoz jutunk. Annak a sornak az összege

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1-2/3} = 3$$

Figyeljünk azonban arra, hogy feladatunkban az összegzés $k=1$-től indul, ezért innen a $k=0$-hoz tartozó tag hiányzik. Tehát

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{3^k} = 4(3-1) = 8$$

12. Feladat
Vizsgáljuk meg az alábbi sor konvergenciáját:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+2k}$$

Útmutatás. Bontsuk fel a szumma mögötti törtet két tört különbségére a következő módon

$$\frac{1}{k^2+2k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

Ekkor az n-ik részletösszeg így írható:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+2k} = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right]$$

Vegyük észre, hogy a negatív és pozitív törtek (minden második zárójelben) kiejtik egymást, ezért a zárójelek felbontása és az egyszerűsítés után csak első két pozitív, és az utolsó két negatív tört marad meg. Ezért

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+2k} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

Az így nyert sorozat nyilvánvalóan konvergens, és a határértéke $3/4$. Tehát a sor konvergens, és az összege

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+2k} = \frac{3}{4}$$

13. Feladat

Vizsgáljuk meg a következő sor konvergenciáját:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3-k}$$

Útmutatás. Az előző feladathoz hasonlóan a szumma mögötti kifejezést törtek különbségére szeretnénk bontani, de most nem látszik könnyen, hogy ezt hogyan lehet megtenni. Ezért így járunk el:

$$\frac{1}{k^3-k} = \frac{A}{k-1} + \frac{B}{k} + \frac{C}{k+1}$$

ahol A, B és C egyelőre ismeretlen konstansok. Végezzük el a jobb oldalon a közös nevezőre hozást, akkor

$$\frac{1}{k^3-k} = \frac{A(k^2+k) + B(k^2-1) + C(k^2-k)}{k^3-k} = \frac{(A+B+C)k^2 + (A-C)k - B}{k^3-k}$$

Mivel a bal és jobb oldalak azonosan egyenlők, a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ A-C &= 0 \\ -B &= 1 \end{aligned}$$

Ennek megoldása $A = C = 1/2$ és $B = -1$. Tehát az n-ik részletösszeg így írható fel:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \right] \end{aligned}$$

Ebből azt látjuk, hogy minden egyes zárójel negatív tagját az előtte álló zárójel utolsó pozitív tagja, és az utána álló zárójel első pozitív tagja kiejti. Amely tagok megmaradnak, azokat így írhatjuk fel:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

Innen már könnyen látható, hogy ez a sorozat konvergens, és a határértéke $1/4$, tehát

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{4}$$

14. Feladat

Vajon konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+k+2}$$

Útmutatás. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\frac{k+2}{k^2+k+2} > \frac{1}{k+1}$$

minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Az egyenlőtlenség jobb oldalán álló törtek az első tag híján éppen a Harmonikus sor tagjai. A Harmonikus sor divergens, ezért az Elégséges feltétel alapján a példánkban szereplő sor is divergens.

FIGYELEM!

Érdemes megjegyezni, hogy az ilyen sorok esetében, ha a tört nagyságrendje k^{-1}, akkor a sor divergens, ha azonban a nagyságrend $k^{-\alpha}$, ahol $\alpha > 1$, akkor a sor már konvergens. Azaz nem mindegy, hogy a k-ik tag milyen gyorsan tart nullához! Erre a kérdésre a 9. fejezetben még visszatérünk.

15. Feladat

Az előadáson már láttuk, hogy az

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

sor konvergens, és az összegére $S < 2$ adódott. Ehhez a sor tagjaira minden $k \geq 2$ esetén a

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2-k}$$

felső becslést alkalmaztuk. Vajon tudnánk-e a sor ismeretlen összegére jobb becslést adni?

Útmutatás. Használjuk a sor tagjaira $k \geq 2$ mellett a következő pontosabb becslést:

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2-1}$$

A jobb oldali kifejezést így lehet két tört különbségére bontani:

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Ekkor az n-ik részletösszegre az adódik, hogy

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \right]$$

A zárójelek negatív tagjai kiesnek a kettővel későbbi zárójel pozitív tagjai miatt, ami marad:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

amely sorozat konvergens, és határértéke $3/4$. Tehát az eredeti sorunk n-ik részletösszegére az adódik, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} < 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Következésképpen

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{7}{4}$$

Megjegyezzük, hogy a pontos érték $S = \pi^2/6$ (de ezt nehéz megmutatni!).

16. Feladat
Döntsük el, hogy konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$$

Útmutatás. Használjuk a Hányados-kritériumot:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^3}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k^3} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}$$

Itt $k \to \infty$ esetén az első köbös tényező 1-hez tart, tehát

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2} < 1$$

Innen azt kapjuk, hogy a sor konvergens (de nem tudjuk, hogy mi az összege).

17. Feladat
Legyen most $x \neq 0$ tetszőleges valós szám, és vizsgáljuk meg a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

sor konvergenciáját.

Útmutatás. Alkalmazzuk újra a Hányados-kritériumot (figyeljünk arra, hogy x negatív is lehet, ezért írjunk abszolút értéket):

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|x|^k} = \frac{|x|}{k+1}$$

Itt $k \to \infty$ esetén a jobb oldali kifejezés nullához tart, ami kisebb, mint 1. Tehát a fenti sor bármely x valós szám mellett abszolút konvergens, és így konvergens is.

18. Feladat
Döntsük el, hogy konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+3}\right)^2$$

Útmutatás. Próbálkozzunk a Hányados-kritériummal:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k}{k+4}\right)^2 \cdot \left(\frac{k+3}{k-1}\right)^2 = \left(\frac{k^2+3k}{k^2+3k-4}\right)^2$$

Ez utóbbi tört 1-hez tart, ha $k \to \infty$. Valóban, a másodfokú tagok együtthatóinak hányadosa éppen 1. Tehát a Hányados-kritérium 1-et ad határértékként, ezért ennek alapján semmit sem mondhatunk a sor konvergenciájáról.
Vizsgáljuk meg azonban a sor tagjait. Láthatjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k-1}{k+3}\right)^2 = 1$$

azaz a_k nem tart nullához. Tehát nem teljesül a szükséges feltétel, ezért ez a sor divergens.

19. Feladat
Döntsük el, hogy konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{2k+3}\right)^k$$

Útmutatás. Vegyük észre, hogy a hatvány alapjára érvényes, hogy

$$0 \leq \frac{k-1}{2k+3} < \frac{1}{2}$$

Mindegyik oldalt k-ik hatványra emelve azt kapjuk, hogy

$$0 \leq \left(\frac{k-1}{2k+3}\right)^k < \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Az egyenlőtlenség jobb oldalán egy olyan geometriai sor tagjai állnak, amelynek kvóciense $1/2$, tehát konvergens, és az összege

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} - 1 = 1$$

ahol a geometriai sor összegképleténél az 1-et azért kellett levonni, mert a sorból a $k = 0$-hoz tartozó tag hiányzik. Tehát az elégséges feltételünk szerint a feladatban szereplő sor konvergens, és összegére

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{2k+3}\right)^k < 1$$

FIGYELEM!
Gyakorlásképpen vizsgáljuk meg e sor konvergenciáját a Hányados-kritérium alkalmazásával is! Ugyanerre az eredményre fogunk jutni. Valóban:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k}{2k+5}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{2k+3}{k-1}\right)^k = \left(\frac{2k+3}{2k+5}\right)^k \cdot \left(\frac{k}{k-1}\right)^k \cdot \frac{k}{2k+5}$$

Itt $k \to \infty$ esetén az első tényező e^{-1}-hez, a második e-hez, a harmadik $1/2$-hez tart. Tehát a határérték kisebb, mint 1, azaz a sor konvergens.
FIGYELEM!
Az első megoldás előnye, hogy becslést is kapunk a sor összegére, míg a másodikban nem!

20. Feladat
Konvergens-e a következő végtelen sor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^k$$

Útmutatás. Probálkozzunk ismét a Hányados-kritériummal:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k}{k+2}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^k = \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^k \cdot \left(\frac{k}{k-1}\right)^k \cdot \frac{k}{k+2}$$

Itt $k \to \infty$ esetén az első tényező e^{-1}-hez, a második e-hez, a harmadik pedig 1-hez tart. Tehát a határérték 1, így ez alapján a konvergenciáról semmit sem tudunk mondani.
Vizsgáljuk meg azonban a sor tagjait. Láthatjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^k = \frac{1}{e^2}$$

azaz a_k nem tart nullához. Tehát nem teljesül a szükséges feltétel, ezért ez a sor divergens.

21. Feladat
Határozzuk meg a következő határértéket:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^3 + 2x^2 + 15x - 6}{2x^3 - 7x^2 + 18x - 8}$$

Útmutatás. Emeljük ki a számlálóból és a nevezőből is az x legmagasabb hatványát:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{-3 + 2/x + 15/x^2 - 6/x^3}{2 - 7/x + 18/x^2 - 8/x^3}$$

Az első tényező 1, a második tényezőben pedig a konstans tagokon kívül mindegyik tag nullához tart, ezért a tört határértéke $-3/2$. Tehát:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^3+2x^2+15x-6}{2x^3-7x^2+18x-8} = -\frac{3}{2}$$

22. Feladat

Nézzük meg, hogy mit állíthatunk általánosan az alábbi parametrikus módon megadott határértékről:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \beta_0}$$

Útmutatás. Az előző feladatban alkalmazott gondolatmenetnek megfelelően emeljük ki a számlálóból és a nevezőből is az x legmagasabb hatványát. Akkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{x^m} \cdot \frac{\alpha_k + \alpha_{k-1}/x + \ldots + \alpha_0/x^k}{\beta_m + \beta_{m-1}/x + \ldots + \beta_0/x^m}$$

A második tényező határértéke α_k/β_m, hiszen a számlálóban és a nevezőben a konstans tagokon kívül mindegyik tag nullához tart. Tehát a határértékre az adódik, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \beta_0} = \begin{cases} 0 & \text{ha } k<m \\ \frac{\alpha_k}{\beta_m} & \text{ha } k=m \\ +\infty & \text{ha } k>m \text{ és } \frac{\alpha_k}{\beta_m}>0 \\ -\infty & \text{ha } k>m \text{ és } \frac{\alpha_k}{\beta_m}<0 \end{cases}$$

23. Feladat

Teljesen analóg módon vizsgáljuk meg a következő határértéket is:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \beta_0}$$

Útmutatás. Kövessük szó szerint az előző feladat lépéseit, akkor a következő határértékhez jutunk:

$$\lim_{x\to-\infty} x^{k-m} \cdot \frac{\alpha_k + \alpha_{k-1}/x + \ldots + \alpha_0/x^k}{\beta_m + \beta_{m-1}/x + \ldots + \beta_0/x^m}$$

Vegyük figyelembe, hogy az x páros hatványa a $-\infty$-ben $+\infty$-hez, míg a páratlan hatványa $-\infty$-ben $-\infty$-hez tart. Ennek alapján az alábbi eredményt fogalmazhatjuk meg:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \beta_0} = \begin{cases} 0 & \text{ha } k<m \\ \frac{\alpha_k}{\beta_m} & \text{ha } k=m \\ +\infty & \text{ha } k>m \text{ és } k-m \text{ páros, és } \frac{\alpha_k}{\beta_m}>0 \\ -\infty & \text{ha } k>m \text{ és } k-m \text{ páros, és } \frac{\alpha_k}{\beta_m}<0 \\ -\infty & \text{ha } k>m \text{ és } k-m \text{ páratlan, és } \frac{\alpha_k}{\beta_m}>0 \\ +\infty & \text{ha } k>m \text{ és } k-m \text{ páratlan, és } \frac{\alpha_k}{\beta_m}<0 \end{cases}$$

24. Feladat

A fenti feladat alapján "ránézésre" állapítsuk meg a következő határértéket:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^5-6x^4+x^3-13x^2+28x-5}{-21x^2+14x-22}$$

Útmutatás. Ebben a feladatban $k-m=5-2=3>0$ és páratlan, továbbá a főegyütthatók hányadosa $-4/21$, ami negatív, ezért az előző feladat eredménye alapján:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^5-6x^4+x^3-13x^2+28x-5}{-21x^2+14x-22} = +\infty$$

25. Feladat
Állítsuk elő a következő határértéket:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$$

Útmutatás. Végezzük el a következő átalakítást:

$$\frac{\sin 2x}{3x}=\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}$$

ahol $x\neq 0$. Innen azonnal látható, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

Más együtthatókkal a feladat teljesen analóg módon oldható meg.

26. Feladat
Vizsgáljuk meg, hogy létezik-e a következő határérték:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}$$

Útmutatás. Ha elvégezzük a négyzetgyökvonást, akkor azt találjuk, hogy

$$\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}=\frac{|\sin x|}{x}=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & \text{ha } x>0\\ -\frac{\sin x}{x} & \text{ha } x<0\end{cases}$$

hiszen $\sin x$ páratlan függvény. Ekkor a jobb oldali határértékre 1, míg a bal oldalira -1 adódik. A kettő nem egyezik, ezért ez a határérték nem létezik.

27. Feladat
Tekintsük az

$$f(x)=\frac{x+1}{x-2}$$

függvényt, és határozzuk meg az egyoldali határértékeket az $x=2$ pontban!

Útmutatás. Tekintsünk egy tetszőleges $x_n\to 2$, $x_n<2$ sorozatot. Ilyenkor a nevező negatív, és nullához tart, míg a számláló pozitív, és 3-hoz tart. Tehát balról a határérték $-\infty$. Teljesen hasonlóan látható, hogy jobbról a határérték $+\infty$. Összefoglalva:

$$\lim_{x\to 2-}\frac{x+1}{x-2}=-\infty \quad \text{továbbá} \quad \lim_{x\to 2+}\frac{x+1}{x-2}=+\infty$$

28. Feladat Vizsgáljuk meg a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

határértéket. Ha $x>0$ adott valós szám, akkor válsszunk olyan n természetes számot, amelyre $n\leq x<n+1$. Ekkor megmutatható, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

A sorozatokról tanultak alapján a Rendőr-elvet alkalmazva tehát megállapíthatjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Hasonló gondolatmenetet alkalmazva azt is meg lehet mutatni, hogy

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Továbbá, ha α tetszőlegesen adott valós szám, akkor

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

Ezen észrevételek alapján állítsuk elő a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+2}\right)^x$$

határértéket.

Útmutatás. Végezzük el a következő átalakítást:

$$\left(\frac{3x+5}{3x+2}\right)^x = \frac{\left(1+\frac{5/3}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{2/3}{x}\right)^x}$$

ahol mind a számlálót, mind a nevezőt elosztottuk $3x$-el. A fenti észrevételek alapján a számláló határértéke $e^{5/3}$, míg a nevezőé $e^{2/3}$. A kettő hányadosát véve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+2}\right)^x = \frac{e^{5/3}}{e^{2/3}} = e$$

29. Feladat

Adjuk meg mindazon a és b paramétereket, amelyekre az alábbi f függvény folytonos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b\sin x}{2x} & \text{ha } x<0 \\ b-a & \text{ha } x=0 \\ \frac{1-\cos x}{x^2}+b & \text{ha } x>0 \end{cases}$$

Útmutatás. Világos, hogy az f függvény folytonos az $x\neq 0$ helyeken. Az $x=0$ pontbeli folytonossághoz az kell, hogy a függvénynek itt legyen határértéke, és az megegyezzen az $f(0)$ helyettesítési értékkel.

A függvénynek az $x=0$ pontban léteznek az egyoldali határértékei. Nevezetesen a bal oldali:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\frac{b\sin x}{2x} = \frac{b}{2}$$

illetve a jobb oldali:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{x^2}+b = b+\frac{1}{2}$$

Határérték akkor és csak akkor létezik, ha az egyoldali határértékek megegyeznek, azaz:

$$\frac{b}{2} = b+\frac{1}{2}$$

amelynek egyetlen megoldása $b=-1$. Ekkor a függvény határértéke az $x=0$ helyen

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$$

FIGYELEM!

A határérték létezésének semmi köze az $f(0)$ helyettesítési értékhez!

A függvény akkor és csak akkor folytonos az $x=0$ pontban, ha a helyettesítési értéke megegyezik a határértékével, azaz

$$f(0) = b-a = -1-a = \lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$$

ahonnan $a=-1/2$ adódik.

30. Feladat
Határozzuk meg a következő határértéket:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-x)$$

Útmutatás. A különbség mindkét tagja végtelenhez tart, ezért végezzük el a következő átalakítást:

$$(\sqrt{x^2+2}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}+x}=\frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}=\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}<\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$$

Innen a Rendőr-elv alapján már látjuk, hogy a határérték nulla, azaz

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-x)=0$$

Figyelem! Teljesen analóg feladatot oldottunk meg sorozatokra! Tessék ellenőrizni!

31. Feladat
Állítsuk elő a következő függvény deriváltját:

$$F(x)=\left(2x^3-6x^2+12x-8\right)^8$$

Útmutatás. Vezessük be az

$$f(y)=y^8 \quad \text{és} \quad g(x)=2x^3-6x^2+12x-8$$

jelöléseket, akkor az F függvény a $F=f\circ g$ alakban írható. Tehát a Láncszabály szerint:

$$F'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=8\left(2x^3-6x^2+12x-8\right)^7\cdot\left(6x^2-12x+12\right)$$

32. Feladat
Keressük meg az alábbi függvény deriváltját:

$$F(x)=\left(\frac{2x^2-5x+6}{3x+7}\right)^6$$

Útmutatás. Használjuk most a következő jelöléseket:

$$f(y)=y^6 \quad \text{és} \quad g(x)=\frac{2x^2-5x+6}{3x+7}$$

akkor látható, hogy $F=f\circ g$. Innen a Láncszabály, és a hányados deriválási szabálya szerint:

$$F'(x)=6\left(\frac{2x^2-5x+6}{3x+7}\right)^5\cdot\frac{(4x-5)(3x+7)-(2x^2-5x+6)\cdot 3}{(3x+7)^2}$$

Ez utóbbi kifejezést még egyszerűbb alakra hozhatjuk.

33. Feladat
Határozzuk meg a következő szorzat deriváltját:

$$F(x)=(3x-7)^8\cdot(5x+1)^6$$

Útmutatás. A hatványok deriválásánál ugyanúgy járunk el, mint az előző feladatokban. Ezen túl még használjuk a szorzat deriválási szabályát is:

$$F'(x)=8(3x-7)^7\cdot 3\cdot(5x+1)^6+(3x-7)^8\cdot 6(5x+1)^5\cdot 5$$

34. Feladat
Határozzuk meg az $f(x)=\sin x$ függvény deriváltját egy tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ pontban.

Útmutatás. Az előadáson már láttuk, hogy f differenciálható az $x = 0$ pontban, és $f'(0) = 1$. Irjuk fel most az f különbségi hányadosát egy tetszőleges x pontban:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\ &= \sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

az addíciós képlet alapján. Itt a második sor első tagjában

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = \lim_{h\to 0} h\frac{\cos h-1}{h^2} = 0\cdot(-\frac{1}{2}) = 0$$

míg a második tagban

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

Tehát a különbségi hányados határértékére az adódik, hogy

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0\cdot\sin x + 1\cdot\cos x$$

azaz $f'(x) = \cos x$.

35. Feladat

Állítsuk elő az $f(x) = \cos x$ függvény deriváltfüggényét!

Útmutatás. Mivel $f(x) = \cos x = \sin(x+\pi/2)$, azért a Láncszabály alapján:

$$f'(x) = \cos(x+\frac{\pi}{2})\cdot 1 = -\sin x$$

36. Feladat

Határozzuk meg a tangens függvény, $f(x) = \tan x$ deriváltját!

Útmutatás. Világos, hogy

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{ahol} \quad x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Tehát használjuk a hányados deriválási szabályát az értelmezési tartomány pontjaiban:

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

37. Feladat

Tekintsük az

$$f(x) = (1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)$$

függvényt, és adjuk meg a deriváltját.

Útmutatás. Használjuk a szorzat deriválási szabályát, a négyzetes trigonometrikus függvényeknél pedig a Láncszabályt. Akkor azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = 2\sin x\cos x(1+\cos^2 x) - (1+\sin^2 x)\cdot 2\cdot\cos x\sin x$$

A kétszeres szögek szögfüggvényeit használva ezt egyszerűbb alakban is felírhatjuk:

$$f'(x) = \sin 2x\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x) = \sin 2x\cdot\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$$

FIGYELEM!

Trigonometrikus függvények deriválásánál nagyon sokféle alakú eredményre juthatunk attól függően, hogy a deriválást hogyan végeztük el. Persze ha jól számoltunk, ezek azonosak.

Például a fenti függvény esetében végezzük el először a kijelölt szorzást, majd ezután állítsuk elő a kapott szorzat deriváltját. Helyes számolással ugyanerre az eredményre jutunk.

38. Feladat

Vizsgáljuk meg, hogy differenciálható-e az alábbi függvény az $x = 0$ pontban:

$$f(x) = |x| \cdot \sin x$$

Útmutatás. Irjuk fel a különbségi hányadost az $x = 0$ pontban:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h| \cdot \sin h}{h} = \begin{cases} \sin h & \text{ha } h > 0 \\ -\sin h & \text{ha } h < 0 \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy itt mind a bal oldali határérték, mind a jobb oldali 0, tehát a különbségi hányadosnak a 0 pontban létezik határértéke. Ezért a függvény az $x = 0$ pontban differenciálható, és deriváltja $f'(0) = 0$.

FIGYELEM!

Az f függvény differenciálhatóságára a szorzat deriválási szabálya alapján nem lehet következtetni, hiszen az első tényező nem differenciálható az $x = 0$ pontban!

39. Feladat

Határozzuk meg az ismeretlen a paraméter értékét úgy, hogy az

$$f(x) = 2x + ax^3$$

függvény grafikonjához az $x = 1$ pontban húzott értintő átmenjen a $P(3, 20)$ koordinátájú ponton.

Útmutatás. Az $x = 1$ pontban a függvényérték $f(1) = 2 + a$. Másrészt a függvény deriváltja

$$f'(x) = 2 + 3ax^2$$

és ennek az $x = 1$ helyen felvettértéke $f'(1) = 2 + 3a$, ez lesz az érintő meredeksége. Tehát az $x = 1$ pontban húzott érintő egyenlete

$$y = (2 + 3a)(x - 1) + 2 + a$$

Az érintő akkor megy át a $P(3, 20)$ ponton, ha a P pont koordinátái kielégítik az érintő egyenletét. Tehát a koordinátákat behelyettesítve a következő egyenlethez jutunk:

$$20 = (2 + 3a)(3 - 1) + 2 + a = 6 + 7a$$

amelynek egyetlen megoldása $a = 2$.

40. Feladat

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{5x^2}{4} + \frac{3x}{2} + \frac{1}{12}$$

Állapítsuk meg, hogy a függvény grafikonjának melyik pontjában húzott érintő lesz merőleges az $y = 2x+9$ egyenesre!

Útmutatás. Legyen az ismeretlen pont a függvény grafikonján a $P(a, f(a))$ pont. Ebben a pontban húzott érintő meredeksége

$$f'(a) = \frac{a^2}{2} - \frac{5a}{2} + \frac{3}{2}$$

Két egyenes merőlegességének feltétele, hogy a meredekségeik egymás negatív reciprokai legyenek, azaz

$$\frac{a^2}{2} - \frac{5a}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

Ezt egyszerűbb alakra hozva az

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek két megoldása van: $a_1 = 1$ és $a_2 = 4$. Tehát a grafikonon két ilyen tulajdonságú pont van: $P_1(1, 1/2)$, illetve $P_2(4, -41/12)$.

41. Feladat

Keressük meg az

$$F(x) = \ln \sqrt{1 + x^2}$$

függvény deriváltfüggvényét.

Útmutatás. Ellenőrizzük, hogy a függvény az egész számegyenesen definiálva van (és ott nemnegatív). Vegyük észre, hogy F három függvény kompozíciójaként állítható elő: sorrendben az $1+x^2$, a négyzetgyök és a logaritmus. A Láncszabályt alkalmazva:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{1+x^2}$$

A deriváltat előállíthattuk volna egyszerűbben, a következő azonosság alapján is:

$$F(x) = \ln \sqrt{1 + x^2} = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$$

Ellenőrizzük, hogy azonos eredményre jutunk.

42. Feladat

Határozzuk meg a következő szorzat deriváltját:

$$F(x) = (x^2 + 3x)e^{2x-x^2}$$

Útmutatás. Használjuk a szorzat deriválási szabályát, és közben vegyük figyelembe, hogy a második tényező deriválásánál a Láncszabályt kell alkalmazni:

$$F'(x) = (2x + 3)e^{2x-x^2} + (x^2 + 3x)(2 - 2x)e^{2x-x^2} = (-2x^3 - 4x^2 + 8x + 3)e^{2x-x^2}$$

43. Feladat

Vajon hogyan kaphatjuk meg az

$$F(x) = x^x \quad x > 0$$

függvény deriváltját?

Útmutatás. Gondoljuk meg, hogy ebben az esetben sem a hatványfüggvények, sem az exponenciális függvény deriválási szabályát nem tudjuk közvetlenül alkalmazni. Ezért így járunk el:

$$F(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \ln x} \quad x > 0$$

Ekkor már alkalmazhatjuk a Láncszabályt:

$$F'(x) = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

ahol a kitevő deriválásánál a szorzat deriválási szabályát alkalmaztuk. Általában hasonlóan járunk el az olyan hatványok deriválásánál, ahol az alap és a kitevő is az x függvénye.

44. Feladat

Az előző feladat módszerét követve keressük az

$$F(x) = \sqrt[x]{x} \quad x > 0$$

függvény deriváltját.

Útmutatás. Az előzőekhez hasonlóan írjuk át a függvényt a következő alakba:

$$F(x) = \left(e^{\ln x}\right)^{1/x} = e^{\frac{1}{x} \ln x} \quad x > 0$$

Ekkor a deriváltat a fentihez hasonló módon számolva:

$$F'(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = \sqrt[x]{x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$$

45. Feladat

Vizsgáluk meg, hogy differenciálható-e az

$$f(x) = xe^{-|x|}$$

függvény az $x = 0$ pontban.

Útmutatás. Irjuk fel a függvény különbségi hányadosát az $x = 0$ pontban:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \begin{cases} e^{-h} & \text{ha } h > 0 \\ e^{h} & \text{ha } h < 0 \end{cases}$$

Ennek a kifejezésnek léteznek az egyoldali határértékei, és mind jobb, mind a bal oldali határérték 1. Tehát a függvény differenciálható a 0 pontban, és $f'(0) = 1$.

Ennek alapján azt mondhatjuk, hogy a függvény mindenütt differenciálható, és a deriváltja

$$f'(x) = \begin{cases} (1-x)e^{-x} & \text{ha } x \geq 0 \\ (1+x)e^{x} & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

FIGYELEM! Ezt a legutóbbi formulát csak azután írhatjuk fel, hogy elvégeztük a differenciálhatóság vizsgálatát az $x = 0$ helyen! A Láncszabály alapján a függvény differenciálhatóságára nem lehet következtetni, hiszen a kitevő az $x = 0$ pontban nem differenciálható!

46. Feladat

Az $f(x) = \sin x$ függvény nem kölcsönösen egyértelmű, így nem létezik inverze sem. Ha azonban az értelmezési tartományt leszűkítjük a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumra, akkor azon a függvény már kölcsönösen egyértelmű (és értékkészlete a $[-1, 1]$ intervallum), így van inverze is. Ezt az inverz függvényt "arkusz szinusz" függvénynek nevezzük, jelölése:

$$f^{-1}(y) = \arcsin y$$

FIGYELEM! Készítsük el a grafikonját!

Legyen most y a $[-1, 1]$ intervallum valamely belső pontja, és ott határozzuk meg az inverz függvény deriváltját! Jelentse $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ azt a pontot, amelyre $y = \sin x$. Mivel y belső pont volt, azért x is a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallum belső pontja lesz. Ezen belső pontok esetében $f'(x) = \cos x \neq 0$. Tehát alkalmazhatjuk az inverz függvény differenciálhatósági tételét:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

hiszen az egész $(-\pi/2, \pi/2)$ nyílt intervallumon $\cos x > 0$. Tehát y helyett az x jelölésre térve

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ahol $-1 < x < 1$.

47. Feladat

Az $f(x) = \cos x$ függvény nem kölcsönösen egyértelmű, így nem létezik inverze sem. Ha azonban az értelmezési tartományt leszűkítjük a $[0, \pi]$ intervallumra, akkor azon a függvény már kölcsönösen egyértelmű (és értékkészlete a $[-1, 1]$ intervallum), így van inverze is. Ezt az inverz függvényt "arkusz koszinusz" függvénynek nevezzük, jelölése:

$$f^{-1}(y) = \arccos y$$

FIGYELEM! Készítsük el a grafikonját!

Legyen most y a $[-1, 1]$ intervallum valamely belső pontja, és ott határozzuk meg az inverz függvény deriváltját! Jelentse $x \in [0, \pi]$ azt a pontot, amelyre $y = \cos x$. Mivel y belső pont volt, azért x is a $[0, \pi]$ intervallum belső pontja lesz. Ezen belső pontok esetében $f'(x) = -\sin x \neq 0$. Tehát alkalmazhatjuk az inverz függvény differenciálhatósági tételét:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

hiszen az egész $(0, \pi)$ nyílt intervallumon $\sin x > 0$. Tehát y helyett az x jelölésre térve

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ahol $-1 < x < 1$.

FIGYELEM! Érdekes dolog észrevenni, hogy az $\arcsin x$ és $\arccos x$ függvények deriváltjai egymás negatívjai, azaz az összegük deriváltja nulla.

Ez nem meglepő annak fényében, hogy bármely x esetén

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

Ha tehát valamely $y \in (-1, 1)$ pontra $x \in (0, \pi)$ olyan hely, amelyre

$$y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

akkor az inverz függvényekre azt kapjuk, hogy

$$x = \arccos y \quad \text{valamint} \quad \frac{\pi}{2} - x = \arcsin y$$

A két egyenlőséget összeadva az adódik, hogy

$$\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$$

azaz a két függvény összege állandó (konstans). Tehát a deriváltja nulla.

48. Feladat

Az előző két feladathoz hasonlóan most vizsgáljuk meg az $f(x) = \tan x$ tangens függvényt. Ez szintén nem invertálható, de ha az értelmezési tartományát leszűkítjük a $(-\pi/2, \pi/2)$ nyílt intervallumra, akkor ott már kölcsönösen egyértelmű függvényt kapunk (amelynek értékkészlete a $(-\infty, \infty)$ számegyenes). Ennek inverzét nevezzük "arkusz tangens" függvénynek, jelölése:

$$f^{-1}(y) = \arctan y$$

és ennek értelmezési tartománya a $(-\infty, \infty)$ számegyenes.

FIGYELEM! Készítsünk ábrát!

Emlékezzünk vissza, hogy a tangens függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$$

a $(-\pi/2, \pi/2)$ nyílt intervallumban, tehát alkalmazhatjuk az inverz differenciálhatósági tételét. Eszerint

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

bármely $y \in (-\infty, \infty)$ pontban.

49. Feladat

Határozzuk meg az alábbi határértéket:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 + x^2} - 2}{1 - \cos x}$$

Útmutatás. A határérték helyén a tört $0/0$ alakú, alkalmazzuk a L'Hôpital-szabályt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 + x^2} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x/\sqrt{4 + x^2}}{\sin x}$$

amely még mindig $0/0$ alakú. Alkalmazzuk másodszor is a L'Hôpital-szabályt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x/\sqrt{4 + x^2}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sqrt{4+x^2} - x^2/\sqrt{4+x^2}}{4+x^2}}{\cos x}$$

Ez utóbbi határértékben a számláló határértéke 1/2, míg a nevezőé 1, tehát

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{1-\cos x} = \frac{1}{2}$$

50. Feladat
A L'Hôpital-szabály segítségével állítsuk elő a következő határértéket:

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x$$

Útmutatás. Irjuk át a kifejezést hányados alakba, és úgy használjuk a L'Hôpital-szabályt:

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0$$

51. Feladat
Határozzuk meg az alábbi határértéket:

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$$

Útmutatás. A L'Hôpital-szabály alkalmazásához írjuk fel a kifejezést tört alakban, utána kétszer egymás után alkalmazzuk a L'Hôpital-szabályt:

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Az eljárásból azt látjuk, hogy nem csak négyzetes szorzóval, hanem az x akármilyen hatványával ezt a határértéket kapjuk, hiszen a számlálót elegendően sokszor deriválva a hatvány eltűnik, míg a nevezőben mindegyik lépésben e^x marad. Tehát bármely n természetes számra

$$\lim_{x \to \infty} x^n e^{-x} = 0$$

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy e^x "gyorsabban tart végtelenhez", mint az x bármelyik hatványa.

52. Feladat
Vajon hogyan kellene értelmezni a 0^0 hatványt? Mondhatnánk, hogy 0, hiszen a 0 bármely hatványa 0. De azt is mondhatnánk, hogy 1, hiszen "bármilyen szám 0-ik hatványa 1". Vajon melyik lenne ésszerű?
Úgy képzeljük, hogy akkor döntenénk jól, ha úgy választanánk, hogy az

$$f(x) = x^x$$

függvény jobbról folytonos legyen az $x = 0$ helyen, azaz ne legyen benne "ugrás". Balról nem lehet, mert ott nincs is értelmezve, gondoljuk meg!
Határozzuk meg tehát az f jobb oldali határértékét az $x = 0$ helyen.

$$\lim_{x \to 0+} x^x = \lim_{x \to 0+} e^{x \ln x} = 1$$

hiszen a kitevő határértéke 0 (lásd a korábbi feladatunkat)!
FIGYELEM! Itt felhasználtuk az e^x függvény folytonosságát a 0 pontban, amit egyébként jól tudunk, hiszen ott még differenciálható is.
Tehát a jó választás az 1.

53. Feladat
Van-e olyan olyan $a \in [2, 3]$ pont, hogy az $f(x) = x^2 - x - 1 + (x^2 - 5x + 6) \ln x$ függvényre $f'(a) = 4$?

Útmutatás. Próbáljuk meg az

$$f'(x) = 2x - 1 + (2x - 5) \ln x + \frac{1}{x}(x^2 - 5x + 6) = 4$$

egyenlet megoldását keresni a $[2, 3]$ intervallumban, ami az egyenlet megoldásával nyilvánvalóan lehetetlen. Ezt az egyenletet algebrai átalakításokkal nem lehet megoldani.

Ha azonban azt vizsgáljuk, hogy $f(2) = 1$ továbbá $f(3) = 5$, akkor a Lagrange-féle középérték-tétel szerint található olyan $a \in [2, 3]$ pont, amelyre

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = 4 = f'(a)$$

Tehát az egyenletnek létezik megoldása a $[2, 3]$ intervallumban.

FIGYELEM!

Eljárhattunk volna a következő módon is. Vizsgáljuk meg a deriváltfüggvényt az intervallum végpontjaiban. Azt találjuk, hogy

$$f'(2) = 3 - \ln 2 < 4 \quad \text{továbbá} \quad f'(3) = 5 + \ln 3 > 4$$

Mivel a deriváltfüggvény folytonos a pozitív félegyenesen, azért a Bolzano-tétel szerint létezik olyan $a \in [2, 3]$ pont, amelyre $f'(a) = 4$.

54. Feladat

Vizsgáljuk meg, hogy milyen intervallumokon monoton az

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

és keressük meg a szélsőértékeit is (ha vannak).

Útmutatás. Határozzuk meg a függvény deriváltját:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$$

Világos, hogy a függvénynek két kritikus pontja van: $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$. A derivált előjelének vizsgálata alapján a következőt állíthatjuk:

- ha $-\infty < x < 0$, akkor $f'(x) < 0$, ezért itt f szigorúan monoton fogyó,
- ha $0 < x < 2$, akkor $f'(x) > 0$, ezért itt f szigorúan monoton növő,
- ha $2 < x < +\infty$, akkor $f'(x) < 0$, ezért itt f szigorúan monoton fogyó.

Láthatjuk, hogy a derivált mindkét kritikus pontban előjelet vált, ezért az alábbi eredményre jutunk:

- az $x_1 = 0$ pontban az f függvénynek (globális) minimumhelye van,
- az $x_2 = 2$ pontban az f függvénynek lokális maximumhelye van.

Könnyen látható, hogy az $x_2 = 2$ maximumhely csak lokális és nem globális. Ugyanis a függvény felülről nem korlátos, hiszen

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$$

A L'Hôpital-szabály alapján egyébként azt is láthatjuk, hogy

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$$

Lásd a korábbi gyakorlatokat.

55. Feladat

Határozzuk meg az előző feladatban szereplő függvény konvex és konkáv szakaszait, és keressük meg az inflexiós pontokat.

Útmutatás. Először állítsuk elő a függvény második deriváltját:

$$f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

A második derivált zérushelyei:

$$x_1 = 2 - \sqrt{2} \quad \text{és} \quad x_2 = 2 + \sqrt{2}$$

Tehát a második derivált előjelének vizsgálata alapján a következő megállapítást tehetjük:

- ha $-\infty < x < 2-\sqrt{2}$, akkor $f''(x) > 0$, ezért itt f konvex,
- ha $2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$, akkor $f''(x) < 0$, ezért itt f konkáv,
- ha $2+\sqrt{2} < x < +\infty$, akkor $f''(x) > 0$, ezért itt f konvex.

Tehát f'' mind az x_1, mind az x_2 zérushelyeken előjelet vált, tehát mindkettő az f inflexiós pontja.
FIGYELEM! A függvény grafikonját lásd a Figures.pdf file-ban!

56. Feladat
Tekintsük az ismeretlen a paraméterrel megadott

$$f(x) = 2ax + \ln x \quad x > 0$$

függvényt. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a függvénynek az $x = 1/2$ pontban lokális maximuma legyen.

Útmutatás. A függvény deriváltja

$$f'(x) = 2a + \frac{1}{x}$$

A lokális maximumhelyen a derivált nulla, tehát az $x = 1/2$ helyen szükségképpen

$$2a + 2 = 0$$

Innen $a = -1$ adódik. Ezzel nem vagyunk készen, hiszen ellenőrizni kell, hogy valóban maximumhelyet kaptunk-e. Mivel a második derivált

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

és ez mindenhol negatív, ezért a kritikus pont valóban maximumhely, és $a = -1$ az egyetlen helyes megoldás.

57. Feladat
Határozzuk meg, hogy milyen intervallumokon monoton a következő függvény:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^3} \quad x \neq -1$$

Keressük meg a szélsőértékeket is (ha vannak).

Útmutatás. Állítsuk elő a deriváltat:

$$f'(x) = \frac{1+x^3-3x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}$$

Könnyen látható, hogy a nevező pozitív, ezért a derivált előjelét a számláló határozza meg. Ezt a következőképpen foglalhatjuk össze:

- ha $-\infty < x < -1$, akkor $f'(x) > 0$, ezért itt f szigorúan monoton növő
- ha $-1 < x < 1/\sqrt[3]{2}$, akkor $f'(x) > 0$, ezért itt f szigorúan monoton növő
- ha $1/\sqrt[3]{2} < x < \infty$, akkor $f'(x) < 0$, ezért itt f szigorúan monoton fogyó

Mivel a derivált az $x = 1/\sqrt[3]{2}$ kritikus pontban előjelet vált, azért ott a függvénynek lokális maximum pontja van.
FIGYELEM! Az $x = 1/\sqrt[3]{2}$ pontban a maximum csak lokális, de nem globális! Valóban, az $x = -1$ pontban a függvény nincs értelmezve, viszont az egyoldali határértékei:

$$\lim_{x\to -1-} \frac{x}{1+x^3} = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to -1+} \frac{x}{1+x^3} = -\infty$$

ennélfogva a függvény sem alulról, sem felülről nem korlátos.
FIGYELEM! Jóllehet az f függvény egyaránt szigorúan monoton növő a $(-\infty, -1)$ és a $(-1, 1/\sqrt[3]{2})$ intervallumokon, ez nem jelenti azt, hogy f szigorúan monoton növő lenne a $-\infty, 1/\sqrt[3]{2})$ intervallumon, hiszen közben az $x = -1$ pontban nincs is értelmezve! Lásd az előző megjegyzést!

58. Feladat

Keressük meg az előző függvény konvex és konkáv szakaszait, valamint inflexiós pontjait.

Útmutatás. Állítsuk elő a második deriváltat $x \neq -1$ mellett:

$$f''(x) = \frac{-6x^2(1+x^3)^2 - (1-2x^3) \cdot 2(1+x^3) \cdot 3x^2}{(1+x^3)^4} = \frac{6x^2(x^3-2)}{(1+x^3)^3}$$

A második deriváltnak két zérushelye van: $x_1 = 0$ és $x_2 = \sqrt[3]{2}$. Az előjelek a következőek:

- ha $-\infty < x < -1$, akkor $f''(x) > 0$, ezért itt f konvex,
- ha $-1 < x < 0$, akkor $f''(x) < 0$, ezért itt f konkáv,
- ha $0 < x < \sqrt[3]{2}$, akkor $f''(x) < 0$, ezért itt f konkáv,
- ha $\sqrt[3]{2} < x < +\infty$, akkor $f''(x) > 0$, ezért itt f konvex.

Ennek megfelelően azt mondhatjuk, hogy az $x_1 = 0$ pontban a második derivált nem vált előjelet, ezért ez nem inflexiós pont. Az $x_2 = \sqrt[3]{2}$ pontban azonban f'' előjelet vált, ezért ez inflexiós pont.
FIGYELEM!
Vajon mondhatjuk-e, hogy a függvény az egész $-1 < x < \sqrt[3]{2}$ intervallumon konkáv? Lásd az előző feladat megjegyzését, ahol hasonló kérdésre NEM volt a válasz.
Itt azonban a válasz IGEN, hiszen a függvény az egész intervallumon folytonos, az egész intervallumban teljesül, hogy $f''(x) \leq 0$.
A függvény ábráját lásd a Figures.pdf file-ban!

59. Feladat

Tekintsük az ismeretlen a paraméterrel megadott

$$f(x) = 2ax + \ln x \quad x > 0$$

függvényt. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a függvény a $(0, 1)$ nyílt intervallumon monoton fogyó legyen!

Útmutatás. A függvény deriváltja

$$f'(x) = 2a + \frac{1}{x}$$

Olyan a paramétert keresünk, amelyre f monoton fogyó a $(0, 1)$ nyílt intervallumon, azaz

$$f'(x) = 2a + \frac{1}{x} \leq 0$$

minden $0 < x < 1$ pontban. Ha x elegendően közel van a 0 ponthoz, akkor akármilyen nagy pozitív értéket felvehet, azaz a derivált bármilyen a paraméter mellett biztosan pozitív lesz a 0 ponthoz elég közel. Ezért ilyen a paraméter nem létezik.

60. Feladat

Vizsgáljuk meg az

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

függvényt, és keressük meg a szélsőértékeit.

Útmutatás. Irjuk fel a függvény deriváltját:

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

Azt láthatjuk, hogy a függvénynek két kritikus pontja van

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A derivált előjelét megvizsgálva a következő eredményre jutunk:

- ha $-\infty < x < -1/\sqrt{2}$, akkor $f'(x) < 0$, ezért f szigorúan monoton fogyó,
- ha $-1/\sqrt{2} < 1/\sqrt{2}$, akkor $f'(x) > 0$, ezért f szigorúan monoton növő,
- ha $1/\sqrt{2} < x < +\infty$, akkor $f'(x) < 0$, ezért f szigorúan monoton fogyó.

Tehát azt láthatjuk, hogy x_1 minimumhely, x_2 pedig maximumhely, ráadásul mindkető globális!
FIGYELEM!
Úgy is eljárhattunk volna, hogy felismerjük, hogy f páratlan függvény, azaz szimmetrikus az origóra. Tessék ellenőrizni, könnyű!
Tehát ha a figyelmünket csak a pozitív félegyenesre koncentráljuk, akkor ami ott (globális) maximumhely, annak negatívja a másik oldalon (globális) minimumhely. Tessék átgondolni!

61. Feladat
Képzeljük el, hogy vizsgáljuk az

$$1, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt[4]{4}, \quad \ldots \quad \sqrt[n]{n}, \quad \ldots$$

számokat. Vajon melyik közülük a legnagyobb?
Egyáltalán korrekt kérdés ez? Végtelen sok szám között nem biztos, hogy van legnagyobb!

Útmutatás. Tekintsük az

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

sorozatot. Ekkor egyrészt $a_1 = 1$, másrészt egy korábbi gyakorlatunk alapján tudjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Ez utóbbi határérték alapján azt mondhatjuk, hogy biztosan van olyan N index, amelytől kezdve pl.

$$1 < a_n < 1 + 0.01$$

ha $n \geq N$. Tehát a sorozat elemei között biztosan van legnagyobb, hiszen azt a sorozat első N eleme közül kell kiválasztani. Ez azt jelenti, hogy a feladat kérdése korrekt.
Térjünk rá a legnagyobb elem kiválasztására. Ehhez vizsgáljuk a következő függvényt a pozitív félegyenesen:

$$f(x) = x^{1/x} \quad x > 0$$

amely az egész értékű helyeken éppen a sorozat elemeit veszi fel. Mivel

$$f(x) = x^{1/x} = e^{\ln x/x}$$

azért a Láncszabály szerint

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ln x\right) e^{\ln x/x} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)e^{\ln x/x}$$

Világos, hogy az egyetlen kritikus pont az $x = e$. Mivel az első és utolsó tényező mindig pozitív, azért azt is láthatjuk, hogy

- ha $0 < x < e$, akkor $f'(x) > 0$, ezért f szigorúan monoton növő,
- ha $e < x < +\infty$, akkor $f'(x) < 0$, ezért f szigorúan monoton fogyó.

Tehát az f függvény a globális maximumát az $x = e$ pontban veszi fel. Mivel $e \approx 2,7182...$, azért az a_n sorozat legnagyobb elemét csak $n = 2$ vagy $n = 3$ esetén kaphatjuk. Ezt úgy döntjük el, hogy a két elemet összehasonlítjuk. Mivel

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

azért a sorozat legnagyobb elemét $n = 3$ esetén kapjuk.

62. Feladat
Határozzuk meg a következő integrált az $x \geq -2$ intervallumon:

$$\int \left(3x^2 - 4x + \sqrt{x+2}\right) dx$$

Útmutatás. Tagonként integrálunk:

$$\int \left(3x^2 - 4x + \sqrt{x+2}\right)\, dx = x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}(x+2)^{3/2} + C$$

Figyeljünk arra, hogy a gyökvonás egykettedik hatványt jelent.

63. Feladat

Állítsuk elő a következő határozatlan integrált:

$$\int \sin 2x\, dx$$

Útmutatás. Vegyük észre, hogy $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ éppen a $\sin^2 x$ deriváltja (használjuk a Lánc-szabályt!), ezért

$$\int \sin 2x\, dx = \sin^2 x + C$$

Második megoldás. Úgy is eljárhatunk, hogy

$$\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)' = \sin 2x$$

ezért

$$\int \sin 2x\, dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

FIGYELEM!

Két különböző eljárást alkalmaztunk, vajon melyik vezetett helyes eredményre? Válasz: mindkettő. A két eredmény ugyanis csak egy konstansban különbözik egymástól:

$$-\frac{\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2}\cos^2 x = \sin^2 x - \frac{1}{2}\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \sin^2 x - \frac{1}{2}$$

64. Feladat

Határozzuk meg a következő integrált:

$$\int_0^1 \frac{5x}{1+x^2}\, dx$$

Útmutatás. Irjuk fel az integrált az alábbi módon:

$$\int_0^1 \frac{5x}{1+x^2}\, dx = \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

Az utóbbi integrálban a számláló éppen a nevező deriváltja. Ilyenkor az integrál mögötti tört éppen a nevező logaritmusának deriváltja, azaz

$$\left(\ln(1+x^2)\right)' = \frac{2x}{1+x^2}$$

Ellenőrzésképpen itt is használjuk a Lánc-szabályt! Innen a Newton-Leibniz formula szerint

$$\int_0^1 \frac{5x}{1+x^2}\, dx = \frac{5}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{5}{2}\ln 2$$

FIGYELEM!

A fenti eljárás minden olyan esetben alkalmazható, amikor az integrálás intervallumán $f(x) > 0$, és az integrálandó függvény $f'(x)/f(x)$ alakú. Ilyen esetben a primitív függvény $\ln f(x)$. Például

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\, dx = -\int \frac{-2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\, dx = -\ln(1+\cos^2 x) + C$$

65. Feladat

Az előző feladathoz hasonló észrevétel alapján ($n \neq -1$ esetén):

$$\int f(x)^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

Ellenőrizzük közvetlenül deriválással! Tekintsük például a következő integrált:

$$\int 3x(5+x^2)^3\,dx = \frac{3}{2}\int 2x(5+x^2)^3\,dx = \frac{3}{8}(5+x^2)^4 + C$$

vagy teljesen hasonlóan az alábbi határozott integrálban:

$$\int_0^2 2x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^2 3x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\left[(1+x^3)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{4}{9}(27-1) = \frac{104}{9}$$

a Newton-Leibniz-formula alapján.

66. Feladat

Használjunk parciális integrálást az alábbi feladatban:

$$\int_0^\pi x^2\cos x\,dx$$

Útmutatás. Világos, hogy a megfelelő szereposztás $f'(x) = \cos x$, illetve $g(x) = x^2$, ekkor

$$\int_0^\pi x^2\cos x\,dx = \left[x^2\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\sin x\,dx$$

Itt a kiintegrált rész nulla. A második integrált újra parciálisan integráljuk hasonló szereposztással:

$$\int_0^\pi 2x\sin x\,dx = [-2x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi 2\cos x\,dx = 2\pi$$

mert az utolsó integrál nullával egyenlő. Tehát

$$\int_0^\pi x^2\cos x\,dx = -2\pi$$

67. Feladat

Számítsuk ki a következő integrált:

$$\int_0^1 \arctan x\,dx$$

Útmutatás. Ravasz módon használjuk a parciális integrálást az $f'(x) = 1$ és $g(x) = \arctan x$ szereposztással, így az $\arctan x$ függvényt majd deriválni kell és nem integrálni. Tehát

$$\int_0^1 1\cdot\arctan x\,dx = [x\arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

Hasonló trükkel határozhatjuk meg az $\arcsin x$ függvény primitív függvényét is:

$$\int 1\cdot\arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

a $(-1,1)$ nyílt intervallumban. Az utolsó integrálban azt használtuk fel, hogy a

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

függvény éppen a $\sqrt{1-x^2}$ deriváltja az adott intervallumban. Ellenőrizzük!

Teljesen hasonló módon számíthatnánk ki az $\arccos x$ primitív függvényét. Végezzük el otthon!

68. Feladat
Használjunk helyettesítéses integrálást az alábbi feladatban:

$$\int 5t^3\sqrt{2+t^4}\,dt$$

Útmutatás. Vezessük be a következő helyettesítést: $x = g(t) = 2 + t^4$. Ekkor $g'(t) = 4t^3$, illetve $f(x) = \sqrt{x}$, és így:

$$\begin{aligned} \int 5t^3\sqrt{2+t^4}\,dt &= \frac{5}{4}\int 4t^3\sqrt{2+t^4}\,dt = \frac{5}{4}\int g'(t)\sqrt{g(t)}\,dt \\ &= \frac{5}{4}\int \sqrt{x}\,dx = \frac{5}{6}x^{3/2} + C = \frac{5}{6}(2+t^4)^{3/2} + C \end{aligned}$$

ahol elvégeztük a visszahelyettesítést is.

69. Feladat
Tekintsünk most egy helyettesítést határozott integrálban:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\,dt$$

Útmutatás. Az alkalmas helyettesítés ebben a feladatban:

$$x = g(t) = \sin t \quad g'(t) = \cos t \quad \text{és} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

A helyettesítéses integrált alkalmazva

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\,dt &= \int_0^{\pi/2} g'(t)f(g(t))\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{g'(t)}{1+g(t)^2}\,dt \\ &= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy hogyan változtattuk meg a határokat!

70. Feladat
Nézzünk most egy fordított irányú helyettesítést:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$$

Útmutatás. Vezessük be az $x = g(t) = t - 1$ helyettesítést, ekkor $g'(t) = 1$, tehát

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx = \int_1^2 (t-1)\sqrt{t}\,dt = \int_1^2 \left(t^{3/2} - t^{1/2}\right)\,dt = \left[\frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^2$$

amelyet a határok behelyettesítésével már kiszámolhatunk. Figyeljük meg itt is a határok megváltoztatását a helyettesítésnél!

71. Feladat
Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} y' &= -2y + 2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladat megoldását.

Útmutatás. A megoldásra írjuk fel a Cauchy-formulát:

$$y(t) = e^{-2t}\left(1 + \int_0^t 2e^{2s}\,ds\right) = e^{-2t}\left(1 + \left[e^{2s}\right]_0^t\right) = 1$$

Tehát a feladat egyetlen megoldása az $y = 1$ konstans függvény.

72. Feladat

Az előadáson látott gondolatmenetet használva kiterjeszthetjük a lineáris differenciálegyenlet megoldóképletét függvény együtthatók esetére is.

Nevezetesen legyenek a és b folytonos függvények az I intervallumon, és tekintsük az

$$\begin{aligned} y' &= a(t)y + b(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladatot, ahol $t_0 \in I$ és $y_0 \in \mathbb{R}$ adottak. Vezessük be az

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

jelölést, és szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát az $e^{-A(t)}$ függvénnyel. Átrendezve azt kapjuk, hogy

$$y'e^{-A(t)} - a(t)e^{-A(t)}y = \left(ye^{-A(t)}\right)' = b(t)e^{-A(t)}$$

Mindkét oldalt integrálva, és felhasználva a kezdeti feltételt, az adódik, hogy

$$y(t)e^{-A(t)} - y_0 = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}\, ds$$

hiszen az A függvény a t_0 helyen nulla. Innen az y függvényt kifejezve:

$$y(t) = e^{A(t)}\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}\, ds\right)$$

Ezt a formulát nevezzük a továbbiakban (általánosabb) Cauchy-formulának.

73. Feladat

A Cauchy-formula felhasználásával keressük meg a $t > 0$ félegyenesen az

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{t} + 2t^2 \\ y(1) &= 2 \end{aligned}$$

feladat megoldását.

Útmutatás. Jelen esetben $t_0 = 1$, $y_0 = 2$, valamint $a(t) = 1/t$ és $b(t) = 2t^2$. Továbbá

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{s}\, ds = \ln t$$

és ennek megfelelően

$$e^{A(t)} = t \qquad \text{valamint} \qquad e^{-A(t)} = \frac{1}{t}$$

Mindezeket a Cauchy-formulába behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$y(t) = t\left(2 + \int_1^t 2s\, ds\right) = t(t^2 + 1) = t^3 + t$$

a pozitív félegyenesen. Ellenőrizzük az eredményünket deriválással és közvetlen behelyettesítéssel is!

74. Feladat

Határozzuk meg az

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

improprius integrál értékét.

Útmutatás. Számoljunk közvetlenül a definíció alapján:

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_0^b = \arctan b$$

Az arkusz tangens határértéke $b \to +\infty$ esetén $\pi/2$, tehát azt kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Lévén az integrandus páros függvény, innen azonnal adódik a következő egyenlőség is:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

75. Feladat

Legyen $n \in \mathbb{N}$ adott természetes szám, és határozzuk meg az

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$$

improprius integrált. Figyelem, ezt az integrált az $n = 0$, $n = 1$ és $n = 2$ esetekben az előadáson már kiszámoltuk!

Útmutatás. Az előadás anyaga alapján $I_0 = 1$, $I_1 = 1$, valamint $I_2 = 2$. Legyen most $n > 2$, és használjunk parciális integrálást az $f'(x) = e^{-x}$, illetve $g(x) = x^n$ szereposztással. Ekkor

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

Itt a kiintegrált rész nulla. Gondoljuk meg: az alsó határban x^n lesz nulla, a felső határban pedig a L'Hôpital-szabály miatt kapunk nullát. Ugyanakkor a jobb oldalon álló integrál éppen I_{n-1}. Tehát bármely n természetes számra

$$I_n = n \cdot I_{n-1}$$

Mivel $I_1 = 1$, ez csak úgy lehetséges, hogy $I_n = n!$.

76. Feladat

Az előző feladathoz hasonlóan állítsuk most elő az

$$I_n = \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}\,dx$$

improprius integrált, ahol $\lambda > 0$ adott állandó.

Útmutatás. Integráljunk ismét parciálisan, most az $f'(x) = x^{n-1}$, valamint $g(x) = e^{-\lambda x}$ szereposztással. Ekkor

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left[\frac{x^n}{n} e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty \frac{x^n}{n}\lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\,dx = I_{n+1} \end{aligned}$$

hiszen az előző feladathoz teljesen hasonlóan a kiintegrált rész nulla. Másrészt $n = 1$ esetén

$$I_1 = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1$$

lásd az előadás anyagát. Tehát minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $I_n = 1$.

FIGYELEM!

Végezzük el ebben a feladatban a parciális integrálást fordított szereposztással is, és ellenőrizzük, hogy akkor is pontosan ehhez az eredményhez jutunk! Megjegyezzük, hogy ezen eredményünknek komoly szerepe lesz a valószínűségszámításban.

77. Feladat

Vajon konvergens-e az alábbi improprius integrál:

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+x^2}\,dx$$

Útmutatás. Felső becslést adunk az integrandusra az $[1,\infty)$ intervallumon a következő módon:

$$\frac{\sqrt{x}}{x+x^2} < \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

Ekkor tetszőleges $b > 1$ esetén

$$\int_1^b \frac{\sqrt{x}}{x+x^2}\,dx \le \int_1^b \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$

A jobb oldali integrál konvergens ha $b \to \infty$ mert a nevezőben az x kitevője 1-nél nagyobb, és az integrál határértéke 2 (lásd az előadás anyagát). Tehát az eredeti feladatunk konvergens, és

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+x^2}\,dx \le 2$$

Teljesen hasonló módon találhatunk alsó becslést is:

$$\frac{\sqrt{x}}{x+x^2} \ge \frac{\sqrt{x}}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{3/2}}$$

ha $x \ge 1$, és innen

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+x^2}\,dx \ge \frac{1}{2}\cdot\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx = 1$$

Ezt az egyenlőtlenséget a felső becsléssel összevetve azt kapjuk, hogy

$$1 \le \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+x^2}\,dx \le 2$$

Második megoldás. Hajtsuk végre az $x = g(t) = t^2$ helyettesítést (ahol $t \ge 1$). Ekkor $g'(t) = 2t$, és így tetszőleges $b > 1$ mellett

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{\sqrt{x}}{x+x^2}\,dx &= \int_1^{\sqrt{b}} \frac{2t^2}{t^2+t^4}\,dt = 2\int_1^{\sqrt{b}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= 2\left[\arctan t\right]_1^{\sqrt{b}} = 2\left(\arctan\sqrt{b} - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

(Figyeljük meg a határ megváltoztatását!) Itt $b \to \infty$ esetén az arkusz tangens függvény határértéke $\pi/2$. Tehát az integrál konvergens, és

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

FIGYELEM!

Az első eljárásunk a konvergencia bizonyítására egyszerűbb. Hátránya azonban, hogy az improprius integrálra csak becslést ad, és nem a pontos értéket.

78. Feladat

Határozzuk meg a

$$\sum_{k=1}^\infty k\left(\frac{5}{6}\right)^k$$

sor összegét!

Útmutatás. A geometriai sorról tanultak alapján bármely $-1 < x < 1$ esetén

$$\sum_{k=0}^\infty x^k = \frac{1}{1-x}$$

Mindkét oldalt deriválva az adódik, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(hiszen $k = 0$ esetén a konstans tag deriváltja nulla). Az $x = 5/6$ behelyettesítésével

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{5}{6}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{(1-5/6)^2} = 30$$

79. Feladat

A fentihez hasonló módszerrel adott $-1 < x < 1$ mellett állítsuk elő a

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$$

hatványsor összegfüggvényét.

Útmutatás. Állítsuk elő először a geometriai sor második deriváltját:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Ez már majdnem jó, csak a k^2 szorzó helyett $k(k-1)$ van, és még x^2-el kell szorozni. Az eredeti hatványsort a következő módon bonthatjuk szét:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k &= x^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} + x\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \\ &= x^2\frac{2}{(1-x)^3} + x\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

hiszen $k = 1$ esetén $k^2 = 1$.

FIGYELEM!

Győződjünk meg róla, hogy ez a hatványsor is konvergens a $(-1, 1)$ nyílt intervallumban!

80. Feladat

Határozzuk meg a következő hatványsor összegfüggvényét:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\frac{x^{k+1}}{k!}$$

Útmutatás. Emeljünk ki x-et, és írjuk át a sort a következő alakba:

$$f(x) = \frac{x}{2}\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\frac{x^k}{k!} = \frac{x}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2x)^k}{k!}$$

Ez utóbbi szumma majdnem éppen az e^{2x} függvény Taylor-sora. Azonban az összegzés $k = 1$-től indul, tehát a $k = 0$-hoz tartozó tag hiányzik. Ezt figyelembe véve

$$f(x) = \frac{x}{2}\left(e^{2x} - 1\right)$$

ahol a zárójelen belül a hiányzó tagot levontuk.

81. Feladat

Határozzuk meg a

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{x^k}{k!}$$

hatványsor összegfüggvényét!

Útmutatás. Végezzük el az egyszerűsítést k-val és emeljünk ki x-et:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{x^k}{k!} = x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = xe^x$$

Vegyük ugyanis észre, hogy az utolsó szumma (az indexelést eggyel előrébb tolva) éppen az e^x függvény Taylor-sora. Ez a sor az egész számegyenesen konvergens.

82. Feladat
Állítsuk elő az $f(x) = \sin x$ függvény Taylor-sorát!

Útmutatás. Világos, hogy $f(0) = 0$, másrészt a szinusz függvény páros rendű deriváltjai szinuszosak pozitív, vagy negatív előjellel, ezért a nulla pontban mindegyik nulla, azaz

$$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A páratlan rendű deriváltak koszinuszosak, nevezetesen

$$f^{(4k+1)}(0) = \cos 0 = 1 \qquad f^{(4k+3)}(0) = -\cos 0 = -1 \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Tehát a Taylor-sor a következő alakú lesz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Ellenőrizzük, hogy ez a hatványsor az egész számegyenesen konvergens!
Az is igazolható, hogy ennek a hatványsornak az összege valóban $\sin x$, nevezetesen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

ennek bizonyítása azonban túlmegy a féléves tárgyunk keretein.

83. Feladat
Állítsuk elő az $f(x) = \cos x$ függvény Taylor-sorát!

Útmutatás. Világos, hogy $f(0) = 1$, másrészt a koszinusz függvény páratlan rendű deriváltjai szinuszosak pozitív, vagy negatív előjellel, ezért a nulla pontban mindegyik nulla, azaz

$$f^{(2k+1)}(0) = 0 \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A páros rendű deriváltak koszinuszosak, nevezetesen

$$f^{(4k)}(0) = \cos 0 = 1 \quad \text{és} \quad f^{(4k+2)}(0) = -\cos 0 = -1 \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Tehát a Taylor-sor a következő alakú lesz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Ellenőrizzük, hogy ez a hatványsor az egész számegyenesen konvergens!
Az is igazolható, hogy ennek a hatványsornak az összege valóban $\cos x$, nevezetesen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

ennek bizonyítása azonban túlmegy a féléves tárgyunk keretein.

84. Feladat

Keressük meg azt a hatványsort, amely előállítja az $f(x) = \arctan x$ függvényt.

Útmutatás. Tekintsük azt a geometriai sort, amelynek kvóciense $-x^2$, ahol $-1 < x < 1$. Ilyenkor ez a sor konvergens, hiszen $-1 < -x^2 \leq 0$, és az összege:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2}$$

Integráljuk mindkét oldalt nullától x-ig (FIGYELEM! A hatványsor tagonként integrálható, ez nem nyilvánvaló!):

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x$$

Ez a sor konvergens a $(-1, 1)$ nyílt intervallumban, ELLENŐRIZZÜK!

Az $x = 1$ pontban egy váltakozó előjelű sort kapunk. Korábbi (előadáson is használt) példánkhoz teljesen analóg módon megmutatható, hogy ez a sor is konvergens. Innen adódik a nevezetes azonosság:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

hiszen $\arctan 1 = \pi/4$.

85. Feladat

Adjuk meg az alábbi függvény kritikus pontjait:

$$f(x, y) = x^2 - 2x + 5 + y^2 e^{-y}$$

Útmutatás. Állítsuk elő a parciális deriváltakat, és vizsgáljuk az így létrejövő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2 = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2ye^{-y} - y^2e^{-y} = 0\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásai $x = 1$, valamint $y = 0$ illetve $y = 2$. Tehát a függvénynek két kritikus pontja van, és ezek a $P(1, 0)$ és a $Q(1, 2)$ pontok.

Nem nehéz belátni, hogy a $P(1, 0)$ pont a függvény minimumhelye, hiszen $x = 1$ a csak x-től függő rész globális minimumhelye, továbbá $y = 0$ a csak y-tól függő rész globális minimumhelye. Ezért bármely $(x, y) \neq (1, 0)$ pontban

$$f(x, y) > f(1, 0)$$

Ugyanakkor a $Q(1, 2)$ nem szélsőértékhely. Ha ugyanis valamely $x \neq 1$ koordinátát tekintünk, akkor $f(x, 2) > f(1, 2)$, másrészt ha valamely $y \neq 2$ koordinátát nézünk pl. az $[1, 3]$ intervallumban, akkor pedig $f(1, y) < f(1, 2)$. Tehát $Q(1, 2)$ nem lehet sem lokális minimumhely, sem lokális maximumhely.

86. Feladat

Legyen az alábbiakban

$$f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + 2y^2} \quad \text{ahol} \quad x = g_1(t) = te^{-t} \quad \text{és} \quad y = g_2(t) = e^{-2t}$$

és a Láncszabály segítségével adjuk meg az $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ függvény deriváltját.

Útmutatás. Állítsuk elő az f parciális deriváltjait:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + 2y^2}} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{1 + x^2 + 2y^2}}$$

Ezek után adjuk meg a g_1 és g_2 függvények deriváltjait:

$$g_1'(t) = (1 - t)e^{-t} \qquad \text{és} \qquad g_2'(t) = -2e^{-2t}$$

Tehát a Láncszabály alapján:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t))g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t), g_2(t))g_2'(t) \\
&= \frac{te^{-t}}{\sqrt{1+t^2e^{-2t}+2e^{-4t}}}(1-t)e^{-t} - \frac{2e^{-2t}}{\sqrt{1+t^2e^{-2t}+2e^{-4t}}}2e^{-2t}
\end{aligned}$$

Gyakorlásképpen határozzuk meg a deriváltat úgy is, hogy a g_1 és g_2 függvényeket közvetlenül behelyettesítjük, majd az így nyert függvényt deriváljuk (viszonylag komplikált lesz!). Ellenőrizzük, hogy azonos eredményre jutunk.

87. Feladat

Állítsuk elő az alábbi függvény érintősíkjának egyenletét a $P(1,1)$ pontban

$$f(x,y) = (4x^2 - 2y^3)\sqrt{x^2+y^2+2}$$

Útmutatás. Először határozzuk meg a parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 8x\sqrt{x^2+y^2+2} + (4x^2-2y^3)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+2}} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -6y^2\sqrt{x^2+y^2+2} + (4x^2-2y^3)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+2}}
\end{aligned}$$

A megadott $P(1,1)$ pontban

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 17 \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -11$$

Másrészt világos, hogy $f(1,1) = 4$. Tehát a keresett érintősík egyenlete:

$$17(x-1) - 11(y-1) = z - 4$$

amely egyenlet még egyszerűbb alakra is hozható.

88. Feladat

Adjuk meg az a paraméter értékét, ha az

$$f(x,y) = ay\sqrt{4+x^2+y^2}$$

függvény grafikonjához az $x = 2,\ y = 1$ pontban húzott érintősík átmegy a $P(3;2;13)$ ponton.

Útmutatás. Először állítsuk elő az érintősík egyenletét. Ehhez szükségünk lesz az f parciális deriváltjaira, amelyek:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= ay\frac{x}{\sqrt{4+x^2+y^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= a\sqrt{4+x^2+y^2} + ay\frac{y}{\sqrt{4+x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

A parciális deriváltaknak a megadott helyen felvett értékei

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{2a}{3} \qquad \text{illetve} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 3a + \frac{a}{3} = \frac{10a}{3}$$

Másrészt látható, hogy $f(2,1) = 3a$. Tehát az érintősík (paraméteres!) egyenlete:

$$\frac{2a}{3}(x-2) + \frac{10a}{3}(y-1) = z - 3a$$

Ha ez a sík átmegy a koordinátarendszer $P(3,2,13)$ pontján, akkor a pont koordinátái kielégítik a sík egyenletét, azaz

$$\frac{2a}{3} + \frac{10a}{3} = 13 - 3a$$

Ennek az egyenletnek az egyetlen megoldása $a = 13/7$, ami a feladat megoldása.

89. Feladat

Keressük meg az alábbi függvény kritikus pontjait:

$$f(x,y) = \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{xy}{16}$$

Útmutatás. Állítsuk elő a parciális deriváltakat, és vizsgáljuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{2}{x^2} + \frac{y}{16} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{y^2} + \frac{x}{16} = 0 \end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek az egyetlen megoldása $x = 4$ és $y = 2$.

Ekkor a következőképpen okoskodhatunk. Ha $y = 2$ rögzített, akkor a

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{8}$$

függvénynek az $x = 4$ pontban minimuma van. Hasonlóképpen, ha $x = 4$ rögzített, akkor az

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{y}{4}$$

függvénynek az $y = 2$ pontban minimuma van. Tessék ezeket sztenderd egyváltozós deriválással ellenőrizni!

A fentiek alapján azt gondoljuk, hogy a kétváltozós függvénynek az $x = 4$, $y = 2$ pontban minimuma van.

FIGYELEM!

Ez még nem bizonyítás! Ettől még előfordulhatna, hogy nincs szélsőérték, hiszen a $P(4,2)$ kritikus pontból kiindulva vagy csak az x, vagy csak az y változót mozgattuk!

Annak belátásához, hogy a $P(4,2)$ pontban a függvénynek tényleg minimumhelye van, tekintsük a függvényt

$$f(x,y) = \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{xy}{16}$$

csak a pozitív síknegyedben, ahol $x > 0$ és $y > 0$. Közvetlen behelyettesítéssel látjuk, hogy $f(4,2) = 3/2$. Másrészt a megadott síknegyedben a jobb oldalon mindhárom tag pozitív.

Három darab a_1, a_2 és a_3 pozitív számra a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $a_1 = a_2 = a_3$. Alkalmazzuk most ezt az egyenlőtlenséget az

$$a_1 = \frac{2}{x}, \qquad a_2 = \frac{1}{y} \qquad \text{és} \qquad a_3 = \frac{xy}{16}$$

szereposztással. Behelyettesítés, majd 3-mal szorzás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{xy}{16} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{3}{2}$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $f(x,y) \geq f(4,2)$ az egész síknegyedben, azaz $P(4,2)$ valóban minimumhely.

Sőt, a számtani-mértani egyenlőtlenségben egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{y} = \frac{xy}{16}$$

Ennek az egyenletrendszernek az egyetlen megoldása $x = 4$ és $y = 2$. Tehát a pozitív síknegyed bármely $(x,y) \neq (4,2)$ pontjára

$$f(x,y) > f(4,2)$$

azaz a $P(4,2)$ pont az f függvény szigorú globális minimumhelye a pozitív síknegyedben. (Megjegyezzük, hogy ezt az utóbbi eredményünket pusztán a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján kaptuk. Ilyen módon a feladat deriválás nélkül is megoldható.)

90. Feladat

Adjuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy az

$$f(x,y) = axy\sqrt{4+x^2+y^2} - 9$$

függvény grafikonjához a $P(2,1)$ pontban húzott érintősík átmegy a $Q(4,0,3)$ ponton.

Útmutatás. Állítsuk elő a parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= ay\sqrt{4+x^2+y^2} + axy\frac{x}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= ax\sqrt{4+x^2+y^2} + axy\frac{y}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\end{aligned}$$

A megadott $P(2,1)$ pontban

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 3a + \frac{4a}{3} = \frac{13a}{3} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 6a + \frac{2a}{3} = \frac{20a}{3}$$

Másrészt látható, hogy $f(2,1) = 6a - 9$. Tehát az érintősík (paraméteres!) egyenlete:

$$\frac{13a}{3}(x-2) + \frac{20a}{3}(y-1) = z - 6a + 9$$

Ha ez a sík átmegy a koordinátarendszer $Q(4,0,3)$ pontján, akkor e pont koordinátái kielégítik a sík egyenletét, azaz

$$\frac{26a}{3} - \frac{20a}{3} = 12 - 6a$$

Ennek az egyenletnek az egyetlen megoldása $a = 3/2$, ami a feladat megoldása.

91. Feladat

Döntsük el, hogy melyik állítás IGAZ és melyik HAMIS.

- Ha $a_n \to 0$ és b_n tetszőleges sorozat, akkor $a_n b_n \to 0$.
- Az $f(x) = 2x\ln x$ függvény görbéjéhez az $x = 1$ pontban húzott érintő átmegy a $P(3;6)$ ponton.
- Ha az f függvény folytonos a $[0,1]$ intervallumon, akkor ott felveszi a minimumát.
- Egy függvény akkor és csak akkor folytonos a $[0,1]$-en, ha minden pontban van határértéke.
- Egy (a,b) nyílt intervallumban differenciálható f függvénynek csak akkor van szélsőértéke az x_0 belső pontban, ha $f'(x_0) = 0$.
- Az (a,b) nyílt intervallumban kétszer differenciálható f függvény akkor és csak akkor konkáv az intervallumon, ha az (a,b) minden pontjában $f''(x) \le 0$.
- Ha az f függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor ott folytonos is.
- Ha f szigorúan monoton növő a számegyenesen, akkor minden pontban $f'(x) > 0$.
- Ha a b_n sorozat korlátos, és $a_n \to 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
- Ha az f kétszer folytonosan differenciálható függvénynek az x_0 pont lokális maximumhelye, akkor ott $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$.
- Ha az f függvény folytonos a $[0,1]$ intervallumon, akkor ott korlátos is.
- Az $f(x) = -2x + 4\ln x$ függvény görbéjéhez az $x = 1$ pontban húzott érintő átmegy a $P(3;-2)$ ponton.
- Egy függvény akkor és csak akkor folytonos a $[0,1]$-en, ha minden pontban van jobb és bal oldali határértéke, és ezek megegyeznek.
- Egy sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha monoton és korlátos.
- Egy pozitív tagú végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha a részletösszegek sorozata felülről korlátos.
- Minden hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergencia intervallumban.
- Ha az $|f|$ függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor f is folytonos ezen az intervallumon.