Valószínűségszámítás gyakorló feladatok

A fejezetek számozása az online előadások fejezeteire utal.

13. Fejezet

1. Feladat

Különböző n számú elem összes permutációinak (sorrendjeinek) száma $n!$. Ha azonban az n elem között rendre n_1, n_2 és így tovább n_k azonos (sorrend szempontjából) elem van, akkor a különböző sorrendek (ismétléses permutációk) száma:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Ha például nyolc darab papírlapra felírtuk rendre a 0, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4 számjegyeket, akkor mind a nyolc lapot használva, ezekből hány nyolcjegyű számot tudunk kirakni?

Útmutatás. Az ismétléses permutációt használva

$$\frac{8!}{2! \cdot 3!} - \frac{7!}{2! \cdot 3!}$$

ahol levontuk azok számát, amelyek nullával kezdődnek (azok nem nyolcjegyűek).

2. Feladat

Öt házaspár jegyeket vásárolt egy koncertre egy sorban egymás mellett. Hányféleképpen ültethetők le

(a) tetszőleges sorrendben?

(b) ha a házaspárok egymás mellett ülnek?

(c) ha a férfiak egymás mellett, és a nők is egymás mellett ülnek?

(d) ha a férfiak és a nők váltakozva ülnek?

Útmutatás. A megoldások rendre:

$$(a) : 10! \quad (b) : 5! \cdot 2^5 \quad (c) : 2 \cdot 5! \cdot 5! \quad (d) : 2 \cdot 5! \cdot 5!$$

3. Feladat

Nyolcan sorbanállva várakoznak a buszmegállóban, hogy buszra szálljanak. Hányféle sorrendben tudnak felszállni

(a) tetszőleges sorrendben?

(b) ha egy háromtagú társaság együtt akar felszállni?

(c) ha ketten semmiképpen nem akarnak egymás után következni?

Útmutatás. A megoldások rendre:

$$(a) : 8! \quad (b) : 3! \cdot 6! \quad (c) : 8! - 2! \cdot 7!$$

4. Feladat

A bridzs kártyajátékban 52 lapos francia kártyapaklit osztanak szét 4 játékos között, mindegyik játékos 13 lapot kap. Hányféle kiosztás lehetséges?

Útmutatás. Első megoldás. Az osztást úgy képzeljük el, hogy az 52 lapot sorba rakjuk (bárhogy), ilyen sorrendből 52! számú létezik. Ezután az első 13 lap megy az első játékosnak, a második 13 lap megy a második játékosnak, és így tovább. Egy játékos számára teljesen mindegy, hogy milyen sorrendben kapja a lapokat, csak az számít, hogy végül mit tart a kezében. Ezért a sorrend szempontjából az egy játékos kezében lévő lapok azonosnak tekintendők. Tehát ismétléses permutációs feladattal van dolgunk, amelynek megoldása:

$$\frac{52!}{13! \cdot 13! \cdot 13! \cdot 13!}$$

Második megoldás. Az osztást most úgy képzeljük el, hogy az osztó az 52 lapból kiválaszt 13 lapot, ezt adja az első játékosnak, aztán kiválaszt újabb 13 lapot, ezt adja a második játékosnak, és így tovább, végül a maradék 13 lapot kapja a negyedik játékos. Ez minden egyes lépésben egy kombinációs feladat, azaz a megoldás:

$$\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13}$$

hiszen a negyedik játékosnál már nincs választási lehetőség.

FIGYELEM!

A két meggondolásban a feladatot két teljesen különböző kombinatorikai feladatként kezeltük (ismétléses permutáció, illetve kombináció). Vajon melyik helyes? Válasz: mindkettő! Tessék ezt a binomiális együtthatók kifejtésével közvetlenül is ellenőrizni!

5. Feladat

Feldobunk egyszerre két teljesen egyforma (megkülönböztethetetlen) kockát. Hányféle kimenetel lehetséges?

Útmutatás. A kockák megkülönböztethetetlensége miatt például a $(2, 1)$ és $(1, 2)$ kimeneteleket azonosnak látjuk. Ennek megfelelően számoljuk ki, hány olyan kimenetel van, ahol két különböző szám jön ki, és adjuk hozzá azokat, amelyeknél a két kockán azonos szám áll. Tehát a megfigyelhető kimenetelek száma:

$$\binom{6}{2} + 6 = 21$$

Gondolkodhattunk volna úgy is, hogy a 6 számból kell kettőt kiválasztani a sorrendre tekintet nélkül, és mindegyik szám kétszer is választható. Ez ismétléses kombinációs feladat, azaz

$$\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21$$

6. Feladat

A Binomiális-tétel azt mondja ki, hogy ha a és b tetszőleges valós számok, és n adott természetes szám, akkor

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Ez az azonosság viszonylag egyszerűen meggondolható, ha elképzeljük, hogy az n-ik hatványt kifejtük, mint n-tényezős szorzatot. Adott k esetén hány $a^k b^{n-k}$ alakú tag keletkezik? Pontosan annyi, ahányszor az n tényező közül kiválasztható k tényező, amelyekből az a szorzót választjuk, a többiből pedig a b-t. Ezek száma éppen az

$$\binom{n}{k}$$

binomiális együttható. Az is nyilvánvaló, hogy

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

A Binomiális-tétel alapján könnyen beláthatjuk az alábbi azonosságokat:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

vagy például

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n$$

továbbá

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^k = 0$$

7. Feladat

Igazoljuk a következő azonosságot:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

Útmutatás. Első megoldás. Közös nevezőre hozással igazoljuk az azonosságot:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{(k+1)n!+(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}=\binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

Második megoldás. Tegyük fel, hogy egy tálban van n alma, és 1 körte. Hányféleképpen választhatunk ki a tálból $k+1$ számú gyümölcsöt (akár almát, akár körtét)? Egyrészt világos, hogy a válasz

$$\binom{n+1}{k+1}$$

Most álljunk úgy hozzá, hogy vizsgáljuk meg: a kiválasztott gyümölcsök között a körte közte van, vagy sem. Alább az első tag azon választások száma, amikor nincs, a második, amikor igen:

$$\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$$

Ezzel az azonosságot igazoltuk.

FIGYELEM! Vegyük észre, hogy egy kombinatorikai azonosságot úgy igazoltunk, hogy kreáltunk hozzá egy kombinatorikai feladatot. Az egyik megoldás a jobb oldalt, a másik a bal oldalt adja. Itt nincs szükség közös nevezőre és azonos átalakításokra!

8. Feladat

Igazoljuk a következő azonosságot:

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{m}{k-2}+\ldots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}=\binom{n+m}{k}$$

Útmutatás. Azonnal láthatjuk, hogy az előző feladat első megoldásában használt közös nevezőre hozás itt elég reménytelen feladat. Próbálkozzunk a második megoldás "alma-körte" gondolatmenetével.

Egy tálban van n alma és m körte. Hányféleképpen választhatunk ki a tálból k számú gyümölcsöt? Egyrészt a válasz nyilvánvalóan

$$\binom{n+m}{k}$$

Másrészt végignézhetjük, hogy mi lehet az almák és körték megoszlása. Az összes lehetőségen végigmenve azt kapjuk, hogy:

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{m}{k-2}+\ldots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}=\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$$

A két formula ugyanannak a feladatnak a megoldását adja. Ezzel az azonosságot igazoltuk.

9. Feladat

Egy AK szakos évfolyam esetében annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott hallgató levizsgázott valószínűségszámításból 0.72, annak valószínűsége, hogy levizsgázott mikroökonómiából 0.64, és annak a valószínűsége, hogy mindkettőből levizsgázott 0.54. Mi a valószínűsége, hogy

(a) legalább az egyik tárgyból levizsgázott?

(b) levizsgázott valószínűségszámításból, de mikroökonómiából nem?

(c) egyik tárgyból sem vizsgázott le?

Útmutatás. Jelentse A azt az eseményt, hogy a hallgató levizsgázott valószínűségszámításból, illetve B azt, hogy mikroökonómiából. Ekkor $P(A)=0.72$ és $P(B)=0.64$, továbbá $P(A\cap B)=0.54$. Ekkor kérdéseinkre a válaszok az alábbiak:

(a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.82$

(b) $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=0.72-0.54=0.18$

(c) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.82=0.18$

ahol a (c) megoldásánál a De Morgan-formulát használtuk.

14. Fejezet

10. Feladat

Egy 52 lapos kártyapakliból kiveszünk 5 lapot. Mi a valószínűsége, hogy pontosan 2 pikket és 3 kárót húztunk?

Útmutatás. A pakliban mindegyik színből 13 lap van, ezért

$$\frac{\binom{13}{2}\binom{13}{3}}{\binom{52}{5}}$$

11. Feladat

Egy 52 lapos kártyapakliból véletlenszerűen kiveszünk 5 lapot visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy a mintában mind a négy szín (treff, káró, kőr, pikk) előfordul?

Útmutatás. Vizsgáljuk meg a következő gondolatmenetet. Jelentse A azt az eseményt, hogy az 5 lapos mintában mind a négy szín előfordul. Bármelyik 5 lap választása egyformán valószínű, ezért klasszikus valószínűségi mezővel van dolgunk.

A kedvező esetek számának meghatározásához világos, hogy mindegyik színből 13-féleképpen választhatunk egy lapot. Ha ezt megtettük, az ötödik lap már bármi lehet a maradék 48 lapból.

Az összes esetek száma: ahányféleképpen 5 lap kiválasztható 52 lapból. Tehát

$$P(A) = \frac{13^4 \cdot 48}{\binom{52}{5}}$$

Vajon helyes eredményre jutottunk-e? Ha nem, akkor hogyan javítható a megoldás?

Ez a gondolatmenet nem helyes, ugyanis például az előző formulában a kedvező esetek között a

$$\spadesuit A, \heartsuit A, \diamondsuit A, \clubsuit A, \spadesuit K$$

illetve a

$$\spadesuit K, \heartsuit A, \diamondsuit A, \clubsuit A, \spadesuit A$$

egyaránt szerepelnek, pedig ez ugyanazon kiválasztás.

A helyes megoldás a következő. Ha mindegyik szín szerepel a mintában, akkor valamelyik szín duplán fog szerepelni. Ez a szín 4-féleképpen választható, és ebből a színből 2 lapot választunk, a többiből egyet. Tehát a helyes valószínűség:

$$P(A) = \frac{4 \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{1}^3}{\binom{52}{5}}$$

és ez éppen fele a helytelen megoldásnak.

FIGYELEM!

Az ilyen kombinatorikai feladatoknál sokkal gyakoribb hiba az, hogy bizonyos eseteket többször számolunk, mint az, hogy valamilyen eseteket nem veszünk figyelembe. Ha kétféle hozzáállással kétféle eredményre jutunk, akkor általában a nagyobbik legyen gyanús!

12. Feladat

Egy kiárusitáson egy kosárban van 10 különböző pár cipő. Egy tolvaj véletlenszerűen elvisz 4 cipőt. Mi a valószínűsége, hogy van közte legalább egy pár?

Útmutatás. Az alábbiakban két gondolatmenetet vázolunk, de csak az egyik vezet helyes eredményre.

- Először válasszunk ki egy párt, majd a másik kettő tetszőleges lehet, tehát vagy egy újabb pár, vagy két bármilyen cipő, azaz:
$$\frac{10\binom{18}{2}}{\binom{20}{4}}$$
- Nézzük meg mi a valószínűsége, hogy a kiválasztott cipők között egyetlen pár sincs. Ezt úgy érhetjük el, hogy egy kiválasztott cipő után annak párját félretesszük. Figyeljünk arra, hogy a kiválasztásnál a sorrend nem számít, így:
$$1 - \frac{\frac{20\cdot 18\cdot 16\cdot 14}{4!}}{\binom{20}{4}}$$

Ellenőrizzük, hogy a fenti két érték nem egyenlő! Vajon melyik helyes?

Az első gondolatmenet biztosan nem helyes. Ha ugyanis a párokat megszámozzuk, akkor a jobb és ballábas cipőket megkülönböztetve a kosárban a 1J, 1B, 2J, 2B, és így tovább 10J, 10B cipők vannak. Az első megoldásnál a számlálóban az 1J, 1B, 2J, 2B, valamint a 2J, 2B, 1J, 1B választásokat egyaránt szerepeltettük, pedig ezek azonos minták!

Pontosan akkor követtünk el hibát, amikor a kiválasztásban két komplett pár szerepel, ezeket mindig duplán számoltuk. Kijavíthatjuk ezt a hibát, ha levonjuk a duplán számlolt két pár választását, amelyek száma

$$\binom{10}{2}$$

Ezzel együtt azt is láthatjuk, hogy a második megoldásunk helyes, ugyanis:

$$\frac{10\binom{18}{2}-\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = 1-\frac{\frac{20\cdot 18\cdot 16\cdot 14}{4!}}{\binom{20}{4}}$$

Ellenőrizzük! Korábbi megjegyzésünk itt is érvényes: inkább akkor hibázunk, amikor bizonyos eseteket többször számolunk, és ritkábban akkor, amikor valamit figyelmen kívül hagyunk!

13. Feladat

Egy 52 lapos kártyapakliból véletlenszerűen kiveszünk 5 lapot visszatevés nélkül.

(a) Mi a valószínűsége, hogy mind az 5 lap treff ÉS van közte legalább 1 Ász?

(b) Mi a valószínűsége, hogy mind az 5 lap treff VAGY van közte legalább 1 Ász?

Útmutatás. (a) Tekintsük a következő eseményeket:

$$A = \{\text{mind az 5 lap treff}\} \quad B = \{\text{van közte Ász}\}$$

ekkor

$$P(A\cap B) = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{52}{5}}$$

(b) A fenti jelöléseket használva

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} + 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} - \frac{\binom{12}{4}}{\binom{52}{5}}$$

ahol $P(B)$ kiszámításánál az ellentett eseményt használtuk.

14. Feladat

Antal és Bea céllövésben versenyeznek. Felváltva lőnek, az nyer, aki először talál. Antal a jobb lövő, ő 1/2 valószínűséggel talál, míg Bea csak 1/3 valószínűséggel. Ezért Antal elegánsan felajánlja a kezdést Beának. Vajon ez egy fair verseny?

Útmutatás. A játék akkor fair, ha a nyerési esélyek megegyeznek. Jelentse A azt az eseményt, hogy Antal nyer. Ha Antal nyer, akkor páros számú lövés történt. Jelentse C_k azt az eseményt, hogy a játék a k-ik lövésnél ér véget, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Ekkor

$$A = C_2 \cup C_4 \cup C_6 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{2k}$$

Ha C_{2k} bekövetkezik, akkor előtte Antal $k-1$-szer, Bea pedig k-szor próbálkozott sikertelenül. Tehát:

$$P(C_{2k}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k}$$

minden $k = 1, 2, \ldots$ esetén. Világos, hogy a C_{2k} események egymást páronként kizárják, ezért

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(C_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} = \frac{1}{1-1/3} - 1 = \frac{1}{2}$$

ahol figyelembe vettük, hogy az utolsó geometriai sor tagjai közül a $k = 0$ tag hiányzik. Tehát a fenti feltételekkel a verseny fair.

15. Fejezet

15. Feladat

Tekintsük újra a 9. Feladatot. Egy véletlenszerűen választott hallgató esetén

(a) feltéve, hogy levizsgázott mikroökonómiából, mi a valószínűsége, hogy valószínűségszámításból is?

(b) feltéve, hogy levizsgázott valószínűségszámításból, mi a valószínűsége, hogy mikroökonómiából nem?

(c) feltéve, hogy levizsgázott legalább az egyik tárgyból, mi a valószínűsége, hogy levizsgázott valószínűségszámításból?

(d) feltéve, hogy levizsgázott legalább az egyik tárgyból, mi a valószínűsége, hogy mikroökonómiából nem vizsgázott le?

Útmutatás. Használjuk a 9. Feladat jelöléseit, ekkor

(a) $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = 0.54/0.64 = 0.84375$

(b) $P(\overline{B}|A) = P(\overline{B} \cap A)/P(A) = (P(A) - P(A \cap B))/P(A) = (0.72 - 0.54)/0.72 = 0.25$

(c) $P(A|A \cup B) = P(A)/P(A \cup B) = 0.72/0.82 = 0.878$

(d) $P(\overline{B}|A \cup B) = P(\overline{B} \cap (A \cup B))/P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B})/P(A \cup B) = (P(A) - P(A \cap B))/P(A \cup B) = (0.72 - 0.54)/0.82 = 0.219$

ahol a (c) feladatnál felhasználtuk, hogy $A \cap (A \cup B) = A$, a (d) feladatnál pedig azt, hogy $\overline{B} \cap (A \cup B) = A \cap \overline{B}$.

16. Feladat

Adjuk meg a $P(A|B)$ feltételes valószínűség értékét, ha

(a) B-ből következik A.

(b) A-ból következik B.

(c) A és B kizárják egymást.

(d) A és B függetlenek.

Útmutatás. A feltételes valószínűség definíciója alapján az alábbiakat kapjuk.

(a) Ilyenkor $B \subset A$, ezért $A \cap B = B$, és így $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(B)/P(B) = 1$.

(b) Ilyenkor $A \subset B$, ezért $A \cap B = A$, és így $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A)/P(B)$.

(c) Ilyenkor $A \cap B = \emptyset$, és így $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(\emptyset)/P(B) = 0$.

(d) Ilyenkor $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, és így $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A) \cdot P(B)/P(B) = P(A)$.

17. Feladat

Antal és Bea most a következőt játsszák. Feldobnak egy kockát, majd két érmét annyiszor, amennyit a kocka mutat. Ha legalább egyszer előfordul a Fej–Fej (FF), akkor Antal nyer, ellenkező esetben Bea. Vajon ez egy fair játék?

Útmutatás. A játék akkor fair, ha a nyerési esélyek megegyeznek. Jelentse most B azt az eseményt, hogy Bea nyer, és jelölje C_k azt az eseményt, hogy a kockán kijött szám k (ahol $k = 1, 2, \ldots, 6$). Világos, hogy a $C_1, C_2, \ldots, C_6$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Tehát a Teljes valószínűség tétele miatt

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=1}^{6} P(B|C_k)P(C_k) = \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6\right) < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

A játék tehát nem fair, ha csak hajszálnyival is, de Antalnak előnyösebb.

18. Feladat

Egy 52 lapos kártyapakliból elveszett 2 lap (nem tudjuk melyik). Visszatevés nélkül kiveszünk 4 lapot.

(a) Mi a valószínűsége, hogy pontosan 2 Ász van közte?

(b) Tegyük fel, hogy a kihúzott 4 lap között pontosan 2 Ász van. Mi a valószínűsége, hogy a 2 elveszett lap mindegyike Ász?

Útmutatás. Jelölje rendre B_0, B_1 és B_2 azokat az eseményeket, hogy az elveszett 2 lap között nincs Ász, 1 Ász van, illetve 2 Ász van. Ezek teljes eseményrendszert alkotnak.

Legyen A az az esemény, hogy a kihúzott 4 lap között pontosan 2 Ász van. Ezután:

(a) Használjuk a Teljes valószínűség tételt:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_0)P(B_0) + P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= \frac{\binom{46}{2}\binom{4}{2}}{\binom{50}{4}} \cdot \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}} + \frac{\binom{47}{2}\binom{3}{2}}{\binom{50}{4}} \cdot \frac{\binom{48}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{52}{2}} + \frac{\binom{48}{2}}{\binom{50}{4}} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} \end{aligned}$$

(b) Használjuk a Bayes-tételt:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_0)P(B_0) + P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)}$$

19. Feladat

Egy 52 lapos kártyapakliból elveszett 2 lap (nem tudjuk melyik). Visszatevés nélkül kiveszünk 4 lapot.

(a) Mi a valószínűsége, hogy van közte Király?

(b) Tegyük fel, hogy a kihúzott 4 lap között van Király. Mi a valószínűsége, hogy a 2 elveszett lap mindegyike Király?

Útmutatás. Jelölje rendre B_0, B_1 és B_2 azokat az eseményeket, hogy az elveszett 2 lap között nincs Király, 1 Király van, illetve 2 Király van. Ezek teljes eseményrendszert alkotnak.

Legyen A az az esemény, hogy a kihúzott 4 lap között van Király. Ezután:

(a) Használjuk a Teljes valószínűség tételt (FIGYELEM: érdemes az A ellentettjét használni!):

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_0)P(B_0) + P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= \left(1 - \frac{\binom{46}{4}}{\binom{50}{4}}\right) \cdot \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}} + \left(1 - \frac{\binom{47}{4}}{\binom{50}{4}}\right) \cdot \frac{\binom{48}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{52}{2}} + \left(1 - \frac{\binom{48}{4}}{\binom{50}{4}}\right) \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} \end{aligned}$$

(b) Használjuk a Bayes-tételt:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_0)P(B_0) + P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)}$$

20. Feladat

Egy bizonyos betegség elterjedtsége 6%-os. Egy új orvosi műszer esetén annak valószínűsége, hogy egy beteget helyesen diagnosztizál 0.96, míg annak valószínűsége, hogy egy nem beteget betegnek diagnosztizál 0.05.

(a) Mi a valószínűsége, hogy a műszer egy vizsgált személyt betegnek diagnosztizál?

(b) Ha egy vizsgált személyt a műszer betegnek diagnosztizál, mi a valószínűsége, hogy valóban az?

Útmutatás. Egy véletlenszerűen választott személy esetén legyen

$$B_1 = \{\text{beteg}\} \quad B_2 = \{\text{nem beteg}\} \quad A = \{\text{a műszer betegnek diagnosztizálja}\}$$

Ekkor a B_1 és B_2 események teljes eseményrendszert alkotnak.

(a) A Teljes valószínűség tétel alapján:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = 0.96 \cdot 0.06 + 0.05 \cdot 0.94$$

(b) A Bayes-tétel szerint

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{0.96 \cdot 0.06}{0.96 \cdot 0.06 + 0.05 \cdot 0.94}$$

16. és 17. Fejezet

21. Feladat

Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{(1-x)^2} & \text{ha } x > 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

(a) Adjuk meg az A paraméter értékét!

(b) Határozzuk meg az X mediánját, azaz olyan a valós számot, amelyre $P(X \geq a) = 1/2$.

(c) Van-e az X változónak várható értéke?

Útmutatás. (a)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_2^{\infty} \frac{A}{(1-x)^2}\,dx = \left[\frac{A}{1-x}\right]_2^{\infty} = A$$

innen $A = 1$.

(b)

$$\frac{1}{2} = P(X \geq a) = \int_a^{\infty} \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \left[\frac{1}{1-x}\right]_a^{\infty} = \frac{1}{a-1}$$

innen $a = 3$. Vegyük figyelembe, hogy X folytonos eloszlású, és ezért

$$P(X < 3) = P(X > 3) = \frac{1}{2}$$

(c) Várható érték nem létezik, ugyanis az

$$\int_2^{\infty} \frac{x}{(1-x)^2}\,dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x-1}\,dx + \int_2^{\infty} \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$$

improprius integrál divergens. Valóban, az egyenlőség jobb oldalán álló első integrál értéke végtelen.

22. Feladat

Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-3x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

(a) Adjuk meg az ismeretlen A paraméter értékét!

(b) Határozzuk meg a $P(X > 9|X > 6)$ feltételes valószínűséget.

(c) Melyik nagyobb, az X várható értéke, vagy a mediánja?

Útmutatás. (a) Az A paraméter meghatározása:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = A\int_0^{\infty} e^{-3x}\,dx = A\left[-\frac{e^{-3x}}{3}\right]_0^{\infty} = \frac{A}{3}$$

és innen adódik, hogy $A = 3$.

(b) Vegyük figyelembe, hogy az $\{X > 9\}$ eseményből következik az $\{X > 6\}$ esemény, ezért a feltételes valószínűség definíciója alapján

$$P(X > 9|X > 6) = \frac{P(X > 9)}{P(X > 6)} = \frac{\int_9^{\infty} 3e^{-3x}\,dx}{\int_6^{\infty} 3e^{-3x}\,dx} = \frac{e^{-27}}{e^{-18}} = e^{-9} = P(X > 3)$$

Érdekes eredményt kaptunk, olyan mintha a feltételes valószínűség csak a különbségtől függne.

(c) Az előadás 17. fejezetének 17.12 Példája alapján az X várható értéke

$$E(X) = \frac{1}{3}$$

hiszen itt $\lambda = 3$. Másrészt a medián ismeretlen a értékére azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} = P(X > a) = \int_a^\infty 3e^{-3x}\,dx = \left[-e^{-3x}\right]_a^\infty = e^{-3a}$$

Ebből az egyeletből az adódik, hogy

$$a = \frac{1}{3}\ln 2$$

ami kisebb mint a várható érték, hiszen $\ln 2 < 1$. A folytonos eloszlás miatt az előző feladathoz hasonlóan

$$P(X < a) = P(X > a) = \frac{1}{2}$$

23. Feladat

Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2A}{x^3} & \text{ha } x > 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

(a) Adjuk meg az A paraméter értékét!

(b) Határozzuk meg az X várható értékét.

(c) Számítsuk ki az X varianciáját.

Útmutatás. (a)

$$1 = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{2A}{x^3}\,dx = \left[-\frac{A}{x^2}\right]_2^\infty = \frac{A}{4}$$

innen $A = 4$.

(b)

$$E(X) = \int_{-\infty}^\infty x f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{8}{x^2}\,dx = \left[-\frac{8}{x}\right]_2^\infty = 4$$

(c) Vizsgáljuk meg az X második momentumát:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^\infty x^2 f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{4}{x}\,dx = [4\ln x]_2^\infty$$

amelynek értéke végtelen, azaz a második momentum nem létezik. Így ennek a változónak nincs varianciája.

24. Feladat

Kockával addig dobunk, amíg két egymást követő dobás azonos nem lesz. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

Útmutatás. Jelentse X a szükséges dobások számát. Ellenőrizzük, hogy ekkor az X eloszlása:

$$P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{6} \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Tehát a várható értékre az adódik, hogy

$$E(X) = \sum_{k=2}^\infty k P(X = k) = \frac{1}{6}\sum_{k=2}^\infty k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}$$

A hatványsorokról tanultak alapján bármely $0 < x < 1$ számra

$$\sum_{k=2}^\infty k x^{k-2} = \sum_{k=2}^\infty (k-1)x^{k-2} + \sum_{k=2}^\infty x^{k-2} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{2-x}{(1-x)^2}$$

Ha behelyettesítjük az $x = 5/6$ értéket, akkor azt kapjuk, hogy

$$E(X) = \frac{1}{6}\sum_{k=2}^\infty k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{7/6}{1/36} = 7$$

18. Fejezet

25. Feladat

Egy biztosító társaságnak 6500 ügyfele van, akik mindegyike 5000 Ft éves díjat fizet. Egy évben minden ügyfélnek 0.002 valószínűséggel történik káreseménye egymástól függetlenül. Kár esetén a biztosító 2 millió Ft-ot fizet az ügyfélnek.

(a) Mi a valószínűsége, hogy a biztosító éves nyeresége meghaladja a 10 millió Ft-ot? (Csak a formulát írja fel!)

(b) Adjuk meg a biztosító várható éves nyereségét!

Útmutatás. (a) Jelentse X az adott évben a káresemények számát. Mivel egy Bernoulli-kísérlettel van dolgunk, azért X binomiális eloszlású, amelynek paraméterei $n = 6500$ és $p = 0.002$.

A biztosító teljes éves bevétele 32 500 000.- Ft. A 10 milliós nyereség eléréséhez a káreseményekre kifizetett összeg kevesebb kell legyen, mint 22 500 000.- Ft, azaz a káresemények száma maximum 11 lehet. Tehát

$$P(X \leq 11) = \sum_{k=0}^{11} \binom{6500}{k} 0.002^k \cdot 0.998^{6500-k}$$

(b) Jelentse Y a biztosító éves profitját, akkor $Y = 32\,500\,000 - 2\,000\,000 \cdot X$. A várható érték tulajdonságai alapján

$$E(Y) = 32\,500\,000 - 2\,000\,000 \cdot E(X) = 6\,500\,000$$

hiszen a binomiális eloszlásra $E(X) = np = 13$.

26. Feladat

Feldobunk egyszerre két kockát. Legyen A az az esemény, hogy az összeg 7. Ismételjük meg ezt a kísérletet 30-szor egymástól függetlenül, és jelentse X azon kísérletek számát, amelyekben A bekövetkezett. Adjuk meg az X valószínűségi változó eloszlását, és határozzuk meg a várható értékét és varianciáját!

Útmutatás. Ellenőrizzük, hogy az A eseményre

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Mivel a leírt kísérletsorozat egy Bernoulli-kísérlet, azért X binomiális eloszlású, azaz

$$P(X = k) = \binom{30}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{30-k}$$

ahol $k = 0, 1, 2, \ldots, 30$, az $n = 30$ és $p = 1/6$ paraméterekkel. Ennek megfelelően

$$E(X) = 30 \cdot \frac{1}{6} = 5 \qquad \text{és} \qquad Var(X) = 30 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{6}$$

27. Feladat

Valamely binomiális eloszlású X valószínűségi változó várható értéke 20 és a szórása 4. Adjuk meg a $P(60 < X < 120)$ valószínűséget! (Csak a formulát írja fel!)

Útmutatás. Binomiális eloszlás esetén $E(X) = np = 20$, és $D(X) = \sqrt{np(1-p)} = 4$, ebből a kétismeretlenes egyenletrendszerből $n = 100$ és $p = 0.2$. Tehát

$$P(60 < X < 120) = P(61 \leq X \leq 100) = \sum_{k=61}^{100} \binom{100}{k} 0.2^k \cdot 0.8^{100-k}$$

hiszen a 100 fölötti rész 0 valószínűségű.

28. Feladat

Igazoljuk a geometriai eloszlás *memória nélküli* tulajdonságát, azaz ha X geometriai eloszlású valamely $0 < p < 1$ paraméterrel, akkor bármely $k \geq 1$ természetes számra

$$P(X = k + 1 | X > k) = P(X = 1) = p$$

(Például, ha kockával egymilliószor egymás után nem jött ki 6-os, akkor a következő dobásnál is $1/6$ a 6-os dobás valószínűsége.)

Útmutatás. Irjuk fel az egyenlőség bal oldalán álló feltételes valószínűség definícióját. Ügyeljünk arra, hogy az $\{X = k + 1\}$ eseményből következik az $\{X > k\}$ esemény (részhalmaz!).

$$P(X = k+1|X > k) = \frac{P(X = k+1)}{P(X > k)} = \frac{(1-p)^k p}{\sum_{j=k+1}^{\infty}(1-p)^{j-1}p} = \frac{(1-p)^k p}{(1-p)^k \sum_{j=1}^{\infty}(1-p)^{j-1}p} = p$$

hiszen az utolsó szummában

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-p)^{j-1}p = 1$$

a geometriai eloszlás definíciója alapján. Ellenőrizzük!

Teljesen hasonló módon a következő (általánosabb) memória nélküli tulajdonságot is igazolhatjuk:

$$P(X = k + j|X > k) = P(X = j)$$

bármely j természetes számra. Értelmezzük ezt a formulát!

29. Feladat

Valamely X Poisson-eloszlású valószínűségi változóra tudjuk, hogy $P(X < 2) = 4e^{-3}$. Határozzuk meg X várható értékét és szórását.

Útmutatás. A Poisson-eloszlás ismeretlen λ paraméterét kell meghatároznunk. A feltételünk szerint

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = (\lambda + 1)e^{-\lambda} = 4e^{-3}$$

Ebből az egyenletből $\lambda = 3$. Tehát

$$E(X) = \lambda = 3 \qquad \text{és} \qquad D(X) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{3}$$

30. Feladat

Egy kommunikációs hálózat n csomópontból áll, amelyben mindegyik csomópont adott $0 < p < 1$ valószínűséggel működőképes, egymástól függetlenül. A hálózat akkor működik biztonságosan, ha a csomópontok legalább fele működőképes.

Milyen p esetén lesz egy 5 csomópontos hálózat biztonságosabb mint egy 3 csomópontos?

Útmutatás. Az 5 csomópontos hálózat akkor biztonságosabb mint a 3 csomópontos, ha nagyobb a működési valószínűsége, azaz egyelőre ismeretlen p mellett

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p) + p^5 > \binom{3}{2}p^2(1-p) + p^3$$

FIGYELEM: Bernoulli-kísérlet, azaz a működő csomópontok száma binomiális elsozlású! A binomiális együtthatókat kifejtve, és rendezve a

$$3(1-p)^2(2p-1) > 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk, amelynek megoldása $p > 1/2$.

19. Fejezet

31. Feladat

Egy kartonban 12 palack bor van. Az egyes palackokba töltött bor mennyisége (egymástól függetlenül) normális eloszlású 75 cl várható értékkel és 1 cl szórással. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy kartonban legfeljebb 5 olyan palack bor van, amelyben a betöltött bor mennyisége NEM 73 és 77 cl között van. Határozzuk meg $P(A)$ értékét.

Útmutatás. Jelentse X egy palackba töltött bor mennyiségét. Ekkor X normális eloszlású $m = 75$ és $\sigma = 1$ paraméterekkel. Tehát

$$p = 1 - P(73 < X < 77) = 1 - (\Phi(2) - \Phi(-2)) = 1 - (2\Phi(2) - 1) = 2 - 2\Phi(2)$$

annak a valószínűsége, hogy egy palackban a mennyiség nem 73 és 77 között van. Innen

$$P(A) = \sum_{k=0}^{5} \binom{12}{k} p^k (1-p)^{12-k}$$

ahol p a fenti valószínűség. (FIGYELEM: ez Bernoulli-kísérlet!)

32. Feladat

Egy egyenletes eloszlású X változóra $E(X) = 3/2$ és $D(X) = 7/\sqrt{12}$.

(a) Adja meg X sűrűségfüggvényét!

(b) Határozzuk meg a $P(-3 < X < 4)$ valószínűséget!

Útmutatás. Meg kell határoznunk az egyenletes eloszlás ismeretlen a és b paramétereit.

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{49}{12}$$

ebből az egyenletrendszerből $a = -2$ és $b = 5$. Tehát (a):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{ha } -2 < x < 5 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

a keresett sűrűségfüggvény.

(b) $P(-3 < X < 4) = P(-2 < X < 4) = 6/7$, hiszen a -2 alatti rész 0 valószínűségű.

33. Feladat

(a) Egy adott napon egy részvény záró árfolyama forintban normális eloszlású változó $m = 100$ várható értékkel és $\sigma = 4$ szórással. Ha nyitáskor 100 Ft-ért vettünk részvényt, mi a valószínűsége, hogy záráskor legalább 10%-os nyereségünk lesz? (Használja a Φ függvényt!)

(b) Fejezze ki a standard normális eloszlás Φ eloszlásfüggvénye segítségével annak valószínűségét, hogy a záró árfolyam a 100 Ft körüli 5%-os sávban marad.

Útmutatás. (a) Jelölje X a részvény záró árfolyamát, és F az X eloszlásfüggvényét. Ekkor $P(X > 110) = 1 - F(110) = 1 - \Phi(2.5)$.

(b) $P(95 < X < 105) = F(105) - F(95) = \Phi(1.25) - \Phi(-1.25) = 2\Phi(1.25) - 1$.

34. Feladat

Bizonyos alkatrészek élettartama normális eloszlású, $m = 3$ év várható értékkel, és $\sigma = 1.5$ szórással egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége, hogy 100 ilyen alkatrész között legalább 60 olyan van, amelynek élettartama 6 évnél hosszabb? (Csak a formulát adja meg a Φ függvény segítségével.)

Útmutatás. Jelentse X egy véletlenszerűen választott alkatrész élettartamát, és F az X eloszlásfüggvényét. Ekkor

$$P(X > 6) = 1 - F(6) = 1 - \Phi(2)$$

annak a valószínűsége, hogy egy alkatrész élettartama 6 évnél hosszabb. Tehát a válasz:

$$\sum_{k=60}^{100} \binom{100}{k} (1-\Phi(2))^k \Phi(2)^{100-k}$$

FIGYELEM: ismerjük fel a Bernoulli-kísérletet!

35. Feladat

Határozzuk meg a $P(-2 < X < 10)$ valószínűséget, ha

(a) X $m = 4$, $\sigma = 5$ paraméterű normális eloszlású változó (használja a Φ függvényt).

(b) X egyenletes eloszlású a $[0, 12]$ intervallumon.

(c) X $\lambda = 1/5$ paraméterű exponenciális eloszlású változó.

(d) X $\lambda = 2$ paraméterű Poisson-eloszlású változó.

Útmutatás. (a) $P(-2 < X < 10) = F(10) - F(-2) = \Phi(1.2) - \Phi(-1.2) = 2\Phi(1.2) - 1$.

(b) $P(-2 < X < 10) = P(0 < X < 10) = 5/6$.

(c) $P(-2 < X < 10) = P(0 < X < 10) = \int_0^{10} \frac{1}{5} e^{-x/5}\, dx = 1 - e^{-2}$.

(d) $P(-2 < X < 10) = P(0 \le X \le 9) = \sum_{k=0}^{9} \frac{2^k}{k!} e^{-2}$.

36. Feladat

Legyen X olyan exponenciális eloszlású változó, amelynek várható értéke $E(X) = 3$.

(a) Határozzuk meg az $E(X^2 - 2X)$ várható értéket.

(b) Adjuk meg a $P(X > 9 | X > 6)$ valószínűséget.

Útmutatás. A várható érték alapján az exponenciális eloszlás paramétere $\lambda = 1/3$.

(a) $E(X^2 - 2X) = E(X^2) - 2E(X) = 2/\lambda^2 - 2/\lambda = 18 - 6 = 12$.

(b) Az exponenciális eloszlás memória nélküli tulajdonsága alapján

$$P(X > 9 | X > 6) = P(X > 3) = \int_3^\infty \frac{1}{3} e^{-x/3}\, dx = \left[-e^{-x/3}\right]_3^\infty = \frac{1}{e}$$

37. Feladat

Egy ládában alkatrészek vannak, amelyek élettartama olyan X valószínűségi változó, amelynek várható értéke $m = 4$ év. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy alkatrész élettartama 3 és 5 év között van.

(a) Adja meg a $P(A)$ valószínűséget, ha X normális eloszlású változó, amelyre $m = 4$ és a szórása $\sigma = 0.4$. Használja a Φ függvényt.

(b) Adja meg a $P(A)$ valószínűséget, ha X exponenciális eloszlású változó.

(c) Adja meg a $P(A)$ valószínűséget, ha X egyenletes eloszlású a $[2, 6]$ intervallumon.

Útmutatás. (a) Jelölje F az X eloszlásfüggvényét, akkor

$$P(3 < X < 5) = F(5) - F(3) = \Phi(\frac{1}{0.4}) - \Phi(-\frac{1}{0.4}) = \Phi(2.5) - \Phi(-2.5) = 2\Phi(2.5) - 1$$

(b) Ha X exponenciális eloszlású, akkor a paramétere $\lambda = 1/4$, ezért

$$P(3 < X < 5) = \int_3^5 \frac{1}{4} e^{-x/4}\, dx = \left[-e^{-x/4}\right]_3^5 = e^{-3/4} - e^{-5/4}$$

(c) Ha X egyenletes eloszlású, akkor a valószínűség arányos a részintervallum hosszával, így

$$P(3 < X < 5) = 2/4 = 1/2$$

38. Feladat

Döntse el, hogy melyik IGAZ és melyik HAMIS:

(a) Ha A és B független események, akkor $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is azok.

(b) Ha $P(A) \leq P(B)$, akkor $A \subset B$.

(c) Ha X egyenletes eloszlású a $[0, 6]$ intervallumon, akkor $Var(X) = 3$.

(d) Ha X $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-eloszlású változó, akkor $E(X^2) = \lambda^2$.

(e) Van olyan Poisson eloszlású X változó, amelyre $E(X) = 4$ és $E(X^2) = 20$.

(f) Ha az X Poisson eloszlású változóra $E(X) = 49$, akkor

$$P(X \leq D(X)) = \sum_{k=0}^{7} \frac{49^k}{k!} e^{-49}$$

(g) Ha az A és B eseményekre $P(A) \cdot P(B) \neq 0$ és $P(A|B) = P(B|A)$, akkor $P(A) = P(B)$.

(h) Ha $A \subset B$, akkor $P(A) < P(B)$.

(i) Van olyan exponenciális eloszlású X változó, amelyre $E(X) = 4$ és $E(X^2) = 32$.

(j) Ha A és B függetlenek, akkor A és $A \cap B$ is azok.

(k) Ha az A és B eseményekre $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$ és $P(A \cup B) = 0.8$, akkor $P(A|B) = 0.4$.

(l) Egy $\lambda = 6$ paraméterű Poisson-eloszlású X változóra $E(X^2) = 36$.

39. Feladat

Egy sört palackozó automata által az üvegbe töltött sör normális eloszlású valószínűségi változó $m = 5$ dl várható értékkel és $\sigma = 0.05$ dl szórással (üvegenként egymástól függetlenül). Egy üveg selejtes, ha a betöltött sör mennyisége nincs 4.9 és 5.1 dl között.

(a) Mi a valószínűsége, hogy egy üveg selejtes? (Válaszát a Φ függvénnyel adja meg!)

(b) Mi a valószínűsége, hogy 1000 üveg közül maximum 5 selejtes? (Csak a formulát adja meg!)

(c) Adja meg 1000 üveg közül a selejtesek számának várható értékét!

Útmutatás. (a) Jelentse X az egy üvegbe töltött mennyiséget és F az eloszlásfüggvényét. Akkor

$$p = 1 - P(4.9 < X < 5.1) = 1 - (F(5.1) - F(4.9)) = 1 - (\Phi(2) - \Phi(-2)) = 2 - 2\Phi(2)$$

annak a valószínűsége, hogy egy üveg selejtes.

(b) Mivel Bernoulli-kísérletről van szó, ez a valószínűség:

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{1000}{k} p^k (1-p)^{1000-k}$$

(c) Ha Y jelöli a selejtes üvegek számát, akkor Y binomiális eloszlású (Bernoulli!), $n = 1000$ és $p = 2 - 2\Phi(2)$ paraméterekkel. Tehát $E(Y) = 1000(2 - 2\Phi(2))$.

40. Feladat

Az X valószínűségi változó várható értéke $m = 1$ és a szórását jelölje $\sigma > 0$. Határozzuk meg a $P(m-2\sigma < X < m + 2\sigma)$ valószínűséget, ha

(a) X normális eloszlású (Φ függvénnyel adja meg!),

(b) X exponenciális eloszlású,

(c) X Poisson-eloszlású (csak a formulát adja meg!).

Útmutatás. (a) Ha F az X eloszlásfüggvénye, akkor $P(m-2\sigma < X < m+2\sigma) = F(m+2\sigma) - F(m-2\sigma) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$.

(b) Ha X exponenciális eloszlású, akkor itt $\lambda = 1$, és $m = \sigma = 1$, tehát

$$P(-1 < X < 3) = P(0 < X < 3) = \int_0^3 e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^3 = 1 - e^{-3}$$

(c) Ha X Poisson-eloszlású, akkor itt $\lambda = 1$ és $\sigma = \sqrt{\lambda} = 1$, tehát

$$P(-1 < X < 3) = P(0 \leq X < 3) = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} e^{-1}$$

20. Fejezet

41. Feladat

Az X és Y diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat adja meg.

$Y \setminus X$	0	1	2	3
0	0.15	0.08	0.13	0.04
1	0.04	0.2	0.08	0
2	0.03	0	0.05	0.2

(a) Adjuk meg az Y változó peremeloszlását.
(b) Függetlenek-e az X és Y változók?
(c) Határozzuk meg a $P(X > 1|Y < 2)$ feltételes valószínűséget.
(d) Számítsuk ki $Var(Y)$ értékét.

Útmutatás. (a) A peremeloszlásokat a következő táblázat adja meg:

$Y \setminus X$	0	1	2	3	
0	0.15	0.08	0.13	0.04	0.4
1	0.04	0.2	0.08	0	0.32
2	0.03	0	0.05	0.2	0.28
	0.22	0.28	0.26	0.24	

(b) Nem függetlenek, hiszen $0.15 = P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = 0.22 \cdot 0.4 = 0.088$.
(c) A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$P(X > 1|Y < 2) = \frac{P(X > 1, Y < 2)}{P(Y < 2)} = \frac{0.25}{0.72}$$

(d) Világos, hogy $E(Y) = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.32 + 2 \cdot 0.28 = 0.88$, továbbá a második momentum $E(Y^2) = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.32 + 4 \cdot 0.28 = 1.44$. Innen $Var(Y) = 1.44 - 0.88^2$.

42. Feladat

Feldobunk egy kockát kétszer egymás után. Jelentse X a dobott számok különbségének abszolút értékét, és Y a dobott páros számok számát.
(a) Adjuk meg X és Y együttes eloszlását.
(b) Függetlenek-e X és Y?
(c) Határozzuk meg a $P(Y > 1|X > 3)$ feltételes valószínűséget.

Útmutatás. (a) Az együttes eloszlást az alábbi táblázat adja:

$Y \setminus X$	0	1	2	3	4	5
0	3/36	0	4/36	0	2/36	0
1	0	10/36	0	6/36	0	2/36
2	3/36	0	4/36	0	2/36	0

(b) Nem függetlenek, ugyanis pl. $3/36 = P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = 6/36 \cdot 9/36$.
(c) A feltételes valószínűség definíciója alapján:

$$P(Y > 1|X > 3) = \frac{P(X > 3, Y > 1)}{P(X > 3)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{1}{3}$$

43. Feladat
Az X és Y változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x+y^2) & \text{ha } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

(a) Adjuk meg az a paraméter értékét.
(b) Határozzuk meg az $E(Y)$ várható értéket.
(c) Függetlenek-e az X és Y változók?

Útmutatás. (a) Az y majd az x változó szerint integrálva:

$$1 = a\int_0^1 \int_0^1 (x+y^2)\,dy\,dx = a\int_0^1 \left[xy + y^3/3\right]_0^1\,dx = a\int_0^1 (x+1/3)\,dx = a(1/2+1/3)$$

és innen $a = 6/5$.
(b) Először az Y peremsűrűségfüggvényét állítjuk elő. Adott $0 < y < 1$ mellett:

$$f_Y(y) = \frac{6}{5}\int_0^1 (x+y^2)\,dx = \frac{6}{5}\left[\frac{x^2}{2} + xy^2\right]_0^1 = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}+y^2\right)$$

Tehát a keresett peremsűrűségfüggvény

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}+y^2\right) & \text{ha } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Innen a várható érték:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_Y(y)\,dy = \frac{6}{5}\int_0^1 \left(\frac{y}{2}+y^3\right)\,dy = \frac{6}{5}\left[\frac{y^2}{4}+\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{5}.$$

(c) Nem függetlenek, mert $f(x,y) \neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

44. Feladat
Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \begin{cases} Axy, & \text{ha } 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(a) Adjuk meg az ismeretlen A paramétert.
(b) Függetlenek-e az X és Y változók?
(c) Határozzuk meg az $E(X)$ várható értéket.

Útmutatás. (a) Az A paraméter meghatározása:

$$1 = A\int_0^1 \int_0^2 xy\,dy\,dx = A\int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^2\,dx = A\int_0^1 2x\,dx = A\left[x^2\right]_0^1 = A$$

(b) Integrálásssal láthatjuk, hogy a két peremsűrűségfüggvény:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \qquad \text{és} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{2} & \text{ha } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Tehát $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ minden x és y mellett, ezért X és Y függetlenek.
(c) $E(X) = \int_0^1 2x^2\,dx = 2/3$.

45. Feladat

Az X és Y változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + x + Ay & \text{ha } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

(a) Keressük meg az ismeretlen A paramétert.
(b) Állítsuk elő a peremsűrűségfüggvényeket!
(d) Határozzuk meg a $P(X + Y < 1)$ valószínűséget.

Útmutatás. (a) Az A paraméter meghatározása:

$$1 = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + x + Ay)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[x^2 y + xy + A\frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + x + \frac{A}{2} \right) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{A}{2}$$

innen $A = 1/3$.
(b) Az előző pontban vizsgált integrált tekintve

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{6} & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad \text{és} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{y}{3} & \text{ha } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

(c) A $(0,0)$, $(1,0)$ és $(0,1)$ csúcspontokkal rendelkező háromszög tartományon integrálva:

$$\begin{aligned} P(X + Y < 1) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2 + x + \frac{y}{3} \right) dy\, dx = \int_0^1 \left[x^2 y + xy + \frac{y^2}{6} \right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + x(1-x) + \frac{1}{6}(1-x)^2 \right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{18} \end{aligned}$$

FIGYELEM: segítségképpen nézzük meg az Abrak.pdf file 1. ábráját.

46. Feladat

Az X és Y változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x & \text{ha } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ x + y < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg a $P(Y < 1/2)$ valószínűséget.
(b) Adjuk meg a $P(X < 1/2 | Y < 1/2)$ feltételes valószínűséget.

Útmutatás. (a) Az Abrak.pdf 2. ábrája alapján

$$P(Y < 1/2) = \int_0^{1/2} \int_0^{1-y} 6x\, dx\, dy = \int_0^{1/2} [3x^2]_0^{1-y}\, dy = \int_0^{1/2} 3(1-y)^2\, dy = 7/8$$

(b) Használjuk a 2. ábrát, akkor világos, hogy

$$P(X < 1/2, Y < 1/2) = \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} 6x\, dx\, dy = \int_0^{1/2} [3x^2]_0^{1/2} = 3/8$$

ezért a feltételes valószínűség definíciója alapján:

$$P(X < 1/2 | Y < 1/2) = \frac{P(X < 1/2, Y < 1/2)}{P(Y < 1/2)} = \frac{3/8}{7/8} = \frac{3}{7}$$

21. Fejezet

47. Feladat

Az X és Y változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{ha } 0 < x < y,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg a $P(X+Y>1)$ valószínűséget.
(b) Adjuk meg a $P(X<1/2|Y<1/2)$ feltételes valószínűséget.
(c) Határozzuk meg X és Y kovarianciáját.

Útmutatás. (a) A 3. ábrára tekintettel (lásd: Abrak.pdf, nézzük a kék szaggatott vonalat):

$$\begin{aligned} P(X+Y>1) &= \int_{1/2}^{1}\int_{1-y}^{y}\frac{1}{y}\,dx\,dy = \int_{1/2}^{1}\left[\frac{x}{y}\right]_{1-y}^{y}dy = \int_{1/2}^{1}\left(1-\frac{1-y}{y}\right)dy \\ &= \int_{1/2}^{1}\left(2-\frac{1}{y}\right)dy = [2y-\ln y]_{1/2}^{1} = 1-\ln 2 \end{aligned}$$

(b) A 4. ábra alapján

$$P(X<1/2, Y<1/2) = \int_0^{1/2}\int_0^y \frac{1}{y}\,dx\,dy = \int_0^{1/2}\left[\frac{x}{y}\right]_0^y dy = \int_0^{1/2} dy = \frac{1}{2}$$

Az ábrából az is látható, hogy $P(Y<1/2) = P(X<1/2, Y<1/2) = 1/2$, ezért

$$P(X<1/2|Y<1/2) = \frac{P(X<1/2, Y<1/2)}{P(Y<1/2)} = 1$$

Ez az eredmény nem meglepő, hiszen az egész háromszög tartományon, ahol a sűrűségfüggvény nem nulla, fennáll, hogy $Y > X$. Tehát az $\{Y<1/2\}$ eseményből következik az $\{X<1/2\}$ esemény.
(c) Az X várható értéke parciális integrálással:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x\cdot\int_x^1\frac{1}{y}\,dy\,dx = \int_0^1 x\cdot[\ln y]_x^1\,dx = -\int_0^1 x\ln x\,dx \\ &= -\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_0^1 + \int_0^1\frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ahol alkalmaztuk L'Hôpital-szabályt. Az Y várható értéke:

$$E(Y) = \int_0^1 y\cdot\int_0^y\frac{1}{y}\,dx\,dy = \int_0^1 y\left[\frac{x}{y}\right]_0^y dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Továbbá az XY szorzat várható értéke:

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^y xy\frac{1}{y}\,dx\,dy = \int_0^1\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y dy = \int_0^1\frac{y^2}{2}\,dy = \frac{1}{6}$$

Tehát a kovariancia:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y) = \frac{1}{6}-\frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

48. Feladat

Az X és Y változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-2x-3y} & \text{ha } x>0, \text{ és } y>0, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Határozzuk az X és Y korrelációs együtthatóját.

Útmutatás. Vegyük észre, hogy az együttes sűrűségfüggvény a következő két peremsűrűségfüggvény szorzatára bontható:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \qquad \text{és} \qquad f_Y(x) = \begin{cases} 3e^{-3y} & \text{ha } y > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

amelyek rendre $\lambda = 2$, illetve $\mu = 3$ paraméterű exponenciális eloszlások.

FIGYELEM: Ellenőrizzük ezt az észrevételt közvetlenül integrálással is!

Mivel $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ minden pontban, azért X és Y függetlenek, így $Corr(X, Y) = 0$.

49. Feladat

Legyenek X és Y független exponenciális eloszlású valószínűségi változók rendre $\lambda = 1/2$, illetve $\mu = 1/3$ paraméterrel. Határozzuk meg az

$$E((X + Y)^2)$$

várható értéket.

Útmutatás. Világos, hogy az exponenciális eloszlás tulajdonságai miatt $E(X) = 2$, $E(X^2) = 8$, $E(Y) = 3$ és $E(Y^2) = 18$. Másrészt a függetlenség alapján:

$$E((X + Y)^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) = E(X^2) + 2E(X) \cdot E(Y) + E(Y^2)$$

Innen $E((X + Y)^2) = 8 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 18 = 38$.

50. Feladat

Legyenek X és Y független Poisson-eloszlású valószínűségi változók rendre $\lambda = 2$, illetve $\mu = 3$ paraméterrel. Határozzuk meg az

$$E((X - Y)^2)$$

várható értéket.

Útmutatás. Világos, hogy a Poisson-eloszlás tulajdonságai miatt $E(X) = 2$, $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = 6$, és hasonlóan $E(Y) = 3$, $E(Y^2) = Var(Y) + E(Y)^2 = 12$. Másrészt a függetlenség alapján:

$$E((X - Y)^2) = E(X^2) - 2E(XY) + E(Y^2) = E(X^2) - 2E(X) \cdot E(Y) + E(Y^2)$$

Innen $E((X - Y)^2) = 6 - 2 \cdot 2 \cdot 3 + 12 = 6$.

51. Feladat

Legyenek X és Y független normális eloszlású valószínűségű változók, rendre $m_1 = 2$, $\sigma_1 = 1$, illetve $m_2 = 3$, $\sigma_2 = 2$ paraméterekkel.

(a) Adjuk meg $Var(X + Y)$ értékét.

(b) Határozzuk meg az $E(X^2 - XY + Y^2)$ várható értéket.

Útmutatás. (a) Az adatokból egyrészt $Var(X) = 1$ és $Var(Y) = 4$, másrészt a függetlenség miatt:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) = 5$$

(b) Egyrészt $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = 5$, illetve $E(Y^2) = Var(Y) + E(Y)^2 = 13$, másrészt a függetlenség miatt

$$E((X^2 - XY + Y^2) = E(X^2) - E(XY) + E(Y^2) = E(X^2) - E(X) \cdot E(Y) + E(Y^2) = 5 - 6 + 13 = 12$$

52. Feladat

Döntse el, hogy melyik IGAZ és melyik HAMIS.

(a) Ha $Corr(X, Y) = 1/4$, akkor $Corr(-3X, 5Y) = -1/4$

(b) Ha X és Y függetlenek, akkor $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

(c) Ha $Corr(X, Y) = 0$, akkor $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

(d) Ha $Corr(X, Y) = 0$, akkor X és Y függetlenek.

(e) Ha $Z_1, \ldots, Z_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor $D(Z_1 + \ldots + Z_n) = n$.

22. Fejezet

53. Feladat

Legyenek X és Y függetlenek, és egyenletes eloszlásúak a $[0, 1]$ intervallumon. Állítsuk elő az $X + Y$ változó sűrűségfüggvényét.

1. Megoldás. Először állítsuk elő az $X + Y$ eloszlásfüggvényét. Jelölje H ezt az eloszlásfüggvényt, azaz $H(x) = P(X + Y < x)$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén. Világos, hogy $x \leq 0$ mellett $H(x) = P(X + Y < x) = 0$. Ha ezután $0 < x \leq 1$, akkor az 5. ábra alapján

$$H(x) = P(X + Y < x) = \frac{x^2}{2}$$

ha pedig $1 < x \leq 2$, akkor a 6. ábra szerint

$$H(x) = P(X + Y < x) = 1 - \frac{1}{2}(2 - x)^2 = 1 - \left(2 - 2x + \frac{x^2}{2}\right) = -1 + 2x - \frac{x^2}{2}$$

Másrészt világos, hogy $x > 2$ esetén $H(x) = P(X + Y < x) = 1$. Tehát az eloszlásfüggvény

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ -1 + 2x - \frac{x^2}{2} & \text{ha } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

A keresett h sűrűségfüggvény ennek deriváltjaként elő, azaz

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{ha } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

2. Megoldás. Határozzuk most meg a h sűrűségfüggvényt közvetlenül a konvolúciós integrál alapján. Az X és Y egyaránt egyenletes eloszlásúak a $[0, 1]$ intervallumon, jelölje f a (azonos) sűrűségfüggvényüket. A konvolúciós integrál szerint bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(x - t)\, dt$$

Nézzük meg, hogy adott x valós szám mellett mikor nem nulla az integrandus (amikor nem nulla, akkor 1). Ennek szükséges és elégséges feltétele $0 < t < 1$ és $0 < x - t < 1$. Ez utóbbi egyenlőtlenséget úgy is írhatjuk, hogy $t < x < 1 + t$. Ha tehát $0 < x < 1$, akkor $0 < t < x$, és ezért

$$h(x) = \int_0^x 1\, dt = x$$

Ha pedig $1 < x < 2$, akkor $x - 1 < t < 1$, és ezért

$$h(x) = \int_{x-1}^{1} 1\, dt = [t]_{x-1}^{1} = 1 - (x - 1) = 2 - x$$

Tehát az $X + Y$ sűrűségfüggvénye

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{ha } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

ahogy azt az előző megoldásban is láttuk.

54. Feladat

Legyenek X és Y független binomiális eloszlású valószínűségi változók n és p, illetve m és p paraméterekkel. Keressük meg $X + Y$ eloszlását.

Útmutatás. Válasszunk egy k természetes számot. Ekkor a függetlenség miatt

$$
\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{j=0}^{k} P(X=j, Y=k-j) = \sum_{j=0}^{k} P(X=j)\cdot P(Y=k-j) = \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \cdot \binom{m}{k-j} p^{k-j}(1-p)^{m-k+j} \\
&= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\cdot\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}
\end{aligned}
$$

Az utolsó sorban az "alma–körte" azonosságot használtuk!

Tehát egy $n+m$ és p paraméterekkel rendelkező binomiális eloszláshoz jutottunk. Vegyük észre, hogy ez a gondolatmenet nem működött volna, ha X és Y p-paraméterei különbözőek lettek volna!

55. Feladat

Egy feleletválasztós vizsgadolgozatban 10 kérdés szerepel, mindegyikhez meg van adva 5 lehetséges válasz, amelyek közül pontosan egy igaz. A vizsgázónak minden kérdéshez be kell jelölnie az egyetlen helyesnek gondolt választ. Ha 40%-os teljesítmény kell a ketteshez, és a vizsgázó egymástól függetlenül teljesen véletlenszerűen jelöli meg a válaszokat, mi a valószínűsége, hogy átmegy?

Útmutatás. Jelentse X_k a k-ik kérdésre kapott pontszámot, ami 1 vagy 0 aszerint, hogy a válasz helyes vagy sem ($k = 1, \ldots, 10$). A pontszámok összegét jelölje $X = X_1 + \ldots + X_{10}$. Ekkor az az esemény, hogy a vizsgázó átmegy, azt jelenti, hogy $\{X \geq 4\}$. Ennek pontos valószínűsége

$$
P(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{10} \binom{10}{k} 0.2^k 0.8^{10-k}
$$

hiszen minden kérdésben 0.2 a helyes válasz valószínűsége.

Világos, hogy X binomiális eloszlású (Bernoulli-kísérlet!) $n = 10$ és $p = 0.2$ paraméterekkel, ezért a várható értéke $m = 2$, és a szórása $\sigma = \sqrt{10}\cdot 0.4 \approx 1.26$.

Ha most a centrális határeloszlás-tétel szerint használjuk a normális eloszlással való közelítést, akkor

$$
\begin{aligned}
P(4 \leq X \leq 10) &= P\left(\frac{2}{1.26} \leq \frac{X-2}{1.26} \leq \frac{8}{1.26}\right) \approx P(1.5873 < Z < 6.3492) \\
&= \Phi(6.3492) - \Phi(1.5873) \approx 1 - 0.9441 = 0.0559
\end{aligned}
$$

és ezek kb. 4 tizedesre pontos értékek. A Φ függvény értékeit megtalálják a Feladatgyűjtemény-2 táblázatai között, vagy bármilyen táblázatkezelő programban (pl. MS Excel).

TANULSÁG: véletlen választással még 6% esélyünk sincs a kettesre.

56. Feladat

Egy AK évfolyamon a valószínűségszámítás tárgy jegyeit a tanár görbe illesztéssel állapítja meg ("Grading on the curve"). Ez azt jelenti, hogy nincsenek fix határok, az összpontszám alapján pl. az alsó 10% bukik, a felső 10% jelest kap, és így tovább. Ha a vizsgadolgozatok pontszámai közelítőleg normális eloszlást mutatnak $m = 74$ és $\sigma = 8.2$ paraméterekkel, melyik az a legalacsonyabb pontszám, amellyel még át lehet menni?

Útmutatás. Jelölje X egy véletlenszerűen vett pontszámot. Olyan a valós számot keresünk, amelyre $P(X < a) \geq 0.1$, és a a legkisebb ilyen tulajdonságú egész szám. A standard normális eloszlásra konvertálással azt kapjuk, hogy

$$
P(X < a) = P\left(Z < \frac{a-m}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{a-74}{8.2}\right) \geq 0.1
$$

A táblázat alapján $\Phi(1.29) = 0.9015$, ezért a szimmetria miatt $\Phi(-1.29) = 0.0985 < 0.1$. Ha tehát

$$
\frac{a-74}{8.2} = -1.29
$$

akkor az adódik, hogy $a \approx 63.422$. Ez azt jelenti, hogy a vizsgázó egy 64 pontos dolgozattal biztosan átmegy a vizsgán. A 63 pont nem biztos, hogy elegendő!

57. Feladat

Egy újonnan üzembehelyezett Toyota gépkocsi esetén az az időtartam, ami az első javításig eltelik, közelítőleg normális eloszlású, $m = 6$ év, és $\sigma = 1.2$ év paraméterekkel. A garancia időszakon belüli javítás ingyenes. Ha egy Toyota kereskedő úgy számol, hogy maximum az eladott gépkocsik 2%-át képes ingyen javítani, milyen hosszú garancia időszakot adjon az általa értékesített gépkocsikra?

Útmutatás. Jelentse egy új Toyota gépkocsira az X valószínűségi változó az első javításig eltelő időt. Olyan a valós számot keresünk (a garancia időtartama), amelyre $P(X < a) \leq 0.02$, és piaci érdekek miatt a lehető legnagyobb ilyen tulajdonságú szám.

A standard normális eloszlásra áttérve

$$P(X < a) = P\left(Z < \frac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-6}{1.2}\right) \leq 0.02$$

A táblázat alapján $\Phi(2.06) = 0.9803$, ezért a szimmetria miatt $\Phi(-2.06) = 0.0197 < 0.02$. Ha tehát

$$\frac{a-6}{1.2} = -2.06$$

akkor azt kapjuk, hogy $a \approx 3.528$. Tehát a kereskedő biztonságosan kínálhat 3 év garanciát (sőt 3.5 évet is).

58. Feladat

Egy biztosítóhoz egy év alatt beérkező kárigények száma adott $\lambda > 0$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Annak valószínűsége, hogy a kárigényt a biztosító elutasítja adott $0 < p < 1$ egymástól függetlenül. Adjuk meg az adott évben az elutasított kárigények számának eloszlását és várható értékét.

Útmutatás. Jelentse X az elutasított kárigények számát, illetve Y a beérkezett kárigények számát. Világos, hogy az $\{Y = n\}$ események $n = 0, 1, 2, \ldots$ mellett teljes eseményrendszert alkotnak.

Legyen most k tetszőleges természetes szám. Az X eloszlásához a $P(X = k)$ valószínűségeket kell meghatároznunk. A Teljes valószínűség tétele folytán

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = k | Y = n) \cdot P(Y = n)$$

Ennek meghatározásához egyrészt figyeljünk arra, hogy adott n mellett a $P(X = k|Y = n)$ valószínűség egy Bernoulli kísérletet jelent. Másrészt $k > n$ esetén $P(X = k|Y = n) = 0$ (elutasított kárigények száma nem lehet több, mint a beérkezők száma). Tehát

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \cdot \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

Vegyük észre ugyanis, hogy az utolsó sorban a szumma éppen 1, hiszen az a $\lambda(1-p)$ paraméterű Poisson-eloszlás összege.

Tehát az elutasított kárigények száma is Poisson eloszlású λp paraméterrel, és így $E(X) = \lambda p$.

59. Feladat

Legyenek Z_1, Z_2 és Z_3 független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, és jelentse $X = Z_1 + Z_2 + Z_3$ az összegüket. Adjuk meg a Φ függvény segítségével a $P(-3 < X < 3)$ valószínűséget.

Útmutatás. A függetlenség miatt X is normális eloszlású változó $m = 0$ várható értékkel, és $\sigma = \sqrt{3}$ szórással. Jelentse F az X eloszlásfüggvényét. Ekkor

$$P(-3 < X < 3) = F(3) - F(-3) = \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(\frac{-3}{\sqrt{3}}\right) = 2\Phi(\sqrt{3}) - 1$$

a Φ függvény szimmetriája miatt.

23. Fejezet

60. Feladat

Tegyük fel, hogy X olyan valószínűségi változó, amelynek várható értéke $m = 10$ és szórása $\sigma = 3$. A Csebisev-egyenlőtlenséggel adjunk becslést a következő valószínűségekre:

(a) $P(5 < X < 15)$

(b) $P(|X - 10| \geq 4)$

(c) $P(3 < X < 16)$

(d) Melyik az a legkisebb $\varepsilon > 0$, amelyikre $P(|X - 10| < \varepsilon) \geq 0.8$?

Útmutatás. A Csebisev-egyenlőtlenség szerint bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$P(m - \varepsilon < X < m + \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

(a) Ekkor $\varepsilon = 5$, ezért $P(5 < X < 15) \geq 1 - 9/25 = 16/25$

(b) $P(|X - 10| \geq 4) = 1 - P(6 < X < 14) \leq 1 - (1 - 9/16) = 9/16$ (Figyeljünk a fordított irányú becslésre!)

(c) Itt a $\{3 < X < 16\}$ esemény nem szimmetrikus $m = 10$-re. Tegyük szimmetrikussá. Mivel alsó becslést tudunk adni a Csebisev-egyenlőtlenséggel, azért a szimmetriát az esemény szűkítésével érhetjük el. Tehát

$$P(3 < X < 16) \geq P(4 < X < 16) \geq 1 - \frac{9}{36} = \frac{3}{4}$$

(d) A Csebisev-egyenlőtlenségből a legkisebb ε értéket így kapjuk:

$$P(|X - 10| < \varepsilon) = P(10 - \varepsilon < X < 10 + \varepsilon) \geq 1 - \frac{9}{\varepsilon^2} = 0.8$$

Innen $\varepsilon^2 = 45$, és így $\varepsilon \approx 6.7$

61. Feladat

Határozzuk meg a $P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma)$ valószínűség alsó becslését a Csebisev-egyenlőtlenséggel, illetve a pontos értékét az alábbi esetekben:

(a) X normális eloszlású,

(b) X egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon,

(c) X exponenciális eloszlású $\lambda = 1/4$ paraméterrel,

(d) X sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 2 & \text{ha } -1/2 < x < 0 \\ 2 - 4x & \text{ha } 0 < x < 1/2 \end{cases}$$

Útmutatás. Az alsó becslés:

$$P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{4} = 0.75$$

(a) Normális eloszlás esetén $P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$

(b) Egyenletes eloszlás esetén $m = 1/2$ és $\sigma = 1/2\sqrt{3}$, tehát

$$P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) = P\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} < X < \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = P(0 < X < 1) = 1$$

(c) Exponenciális eloszlás esetén $m = 1/\lambda = 4$, és $\sigma = 1/\lambda = 4$, tehát

$$\begin{aligned} P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) &= P(-4 < X < 12) = P(0 < X < 12) = \int_0^{12} \frac{1}{4} e^{-x/4}\, dx = \left[-e^{-x/4}\right]_0^{12} \\ &= 1 - e^{-3} \approx 0.95 \end{aligned}$$

(d) Ábra készítésével látható, hogy az adott eloszlás szimmetrikus az origóra, ezért $m = E(X) = 0$. Másrészt f páros függvény, ezért a második momentum

$$E(X^2) = \int_{-1/2}^{1/2} x^2 f(x)\,dx = 2\int_0^{1/2} x^2(2-4x)\,dx = 2\left[\frac{2x^3}{3} - x^4\right]_0^{1/2} = 2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{24}$$

Tehát $\sigma = 1/2\sqrt{6} \approx 0.2$. A sűrűségfüggvény grafikonjára tekintettel

$$P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) \approx \int_{-0.4}^{0.4} f(x)\,dx = 1 - 0.04 = 0.96$$

Tanulság: A Csebisev-egyenlőtlenség minden valószínűségi változóra igaz (ha van m és σ), ennélfogva nem várható tőle nagy pontosság. A becslés annál közelebb van a pontos értékhez minél nagyobb az ε, és minél inkább "szétterülő" az eloszlás.

62. Feladat

(a) Egy multinacionális nagyvállalat 7 vezetői pozícióra hirdet meg pályázatot. Az állások betöltésének feltétele a kiváló matematikai (elsősorban valószínűségszámítási) felkészültség. A pozíciókra 100 pályázó jelentkezik, akik számára a vállalat egy matematikai tesztet készít. A teszten a pályázók átlageredménye $m = 60$ pont, $\sigma = 6$ szórással. A pontszámok eloszlásáról semmit sem tudunk. Ha én pályáztam az állásra, és a teszten elért eredményem 83 pont, akkor vajon számíthatok-e arra, hogy megkapom az egyik pozíciót?

(b) Mit mondhatunk akkor, ha tudjuk, hogy a pontszámok közelítőleg normális eloszlást mutatnak?

(c) Mit mondhatunk akkor, ha a pontszámok közelítőleg egyenletes eloszlásúak?

Útmutatás. (a) Világos, hogy akkor kapom meg az állást, ha a teszteredményem a felső 7%-ban van. Jelentse X egy véleletszerűen választott pályázó pontszámát. Olyan A limit értéket keresünk, amelyre $P(X \geq A) \leq 0.07$, azaz milyen pontszám felett van a felső 7%.

Mivel az eloszlás nem ismert, használjuk a Csebisev egyenlőtlenséget. Keressünk olyan $\varepsilon > 0$ számot, hogy

$$P(m - \varepsilon < X < m + \varepsilon) = P(60 - \varepsilon < X < 60 + \varepsilon) \geq 1 - \frac{36}{\varepsilon^2} = 0.93$$

Ekkor ugyanis $P(X \geq 60 + \varepsilon) \leq 0.07$ biztosan teljesül, tehát $60 + \varepsilon$ jó választás lesz az A limit értéknek, és a Csebisev-egyenlőtlenség alapján ε a legkisebb ilyen érték. A fenti relációból

$$1 - \frac{36}{\varepsilon^2} = 0.93$$

és innen $\varepsilon^2 \approx 514.28$, azaz $\varepsilon \approx 22.677$. Mivel $60 + 22.677 < 83$, ezért egészen biztosan megkapom az egyik állást.

FIGYELEM! Ha ezen számolás alapján az jött volna ki, hogy $m + \varepsilon > 83$, még akkor is lehetséges, hogy megkapom az állást, mert a Csebisev-egyenlőtlenség viszonylag durva becslést jelenthet. Nem beszélve arról, hogy az $m - \varepsilon$ alatti részt nem is vettük figyelembe. Csak éppen a pozíció elnyerése ezzel a megoldással nem garantálható (csak legfeljebb valószínűsíthető, ha a különbség kicsi).

(b) Ha a pontszámok eloszlása közelítőleg normális $m = 60$ és $\sigma = 6$ paraméterrel, akkor a keresett A értékre azt kapjuk, hogy

$$P(X \geq A) = 1 - F(A) = 1 - \Phi\left(\frac{A - 60}{6}\right) \leq 0.07$$

$$\frac{A - 60}{6} = 1.48$$

egyenlőségből $A \approx 68.88$. Tehát ezen többlet információ alapján azt látjuk, hogy már egy 69 pontos dolgozattal is biztosan elnyerhető az állás.

(c) Ha X egyenletes eloszlású valamely $[a, b]$ intervallumon, akkor az ismeretlen a és b végpontokra

$$\frac{a + b}{2} = 60 \quad \text{és} \quad \frac{(b - a)^2}{12} = 36$$

Ebből az egyenletrendszerből $b - a \approx 20.6$, és így a végpontokra $a \approx 49.7$ és $b \approx 70.3$. Ennek az $[a, b]$ intervallumnak a felső 7%-a biztosan a $[68.8, 70.3]$ intervallumban van.

Tehát a 69 pont ebben az esetben is biztosan elegendő az állás elnyeréséhez.

63. Feladat

Egy biztosító társaságnak 10 000 ügyfele van, akik mindegyike egy adott évben $p = 0.002$ valószínűséggel nyújt be kárigényt egymástól függetlenül. Határozzuk meg, hogy 90%-os biztonsággal milyen határok között lesz az adott évben a beérkezett kárigények száma.

Útmutatás. Jelentse X az adott évben beérkezett kárigények számát. Mivel Bernoulli-kísérletről van szó, X binomiális eloszlású $n = 10000$ és $p = 0.002$ paraméterekkel. Tehát $m = E(X) = np = 20$, és $Var(X) = \sigma^2 = np(1-p) = 20 \cdot 0.998 \approx 20$, azaz $\sigma \approx 4.48$.

A Csebisev-egyenlőtlenség alapján bármely $\varepsilon > 0$ mellett

$$P(|X - m| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 0.9$$

A legjobb ε értéket akkor kapjuk, ha

$$1 - \frac{20}{\varepsilon^2} = 0.9$$

azaz $\varepsilon^2 = 200$, és így $\varepsilon \approx 14.14$. Tehát a beérkező kárigények száma legalább 90%-os biztonsággal 5 és 35 között lesz.