# A Cauchy-integrál

### Bevezetés

A világ legtöbb felsőoktatási intézményében a bevezető jellegű analízis tananyagok a Riemann-féle integrálfogalmat tárgyalják. Ez történetileg, és nem kis részben hagyománytiszteletből alakult így, azonban ennek a felépítésnek számos hátránya van.

Riemann eredetileg azért általánosította a Newton-féle (folytonos függvényekre vonatkozó) integrálfogalmat, hogy nem folytonos függvények Fourier-sorának együtthatóit is meg tudja határozni. Ez a fogalom az Archimédesz-féle klasszikus kétoldali közelítésen alapul, amely a matematika egyik legősibb eljárása, és az emberi gondolkodás meghatározó eleme.

Ugyanakkor ez a fogalom nem igazán jól eltalált az alábbi értelemben. A klasszikus analízis talán legfontosabb tétele a Newton-Leibniz-formula, amely az egész újkori természettudomány egyik sarokpontja, és a differenciálszámítás és integrálszámítás nagyszerű összefüggését világítja meg. A formula olyan függvényekre érvényes, amelyek Riemann-integrálhatóak, és egyúttal van primitív függvényük. A folytonos függvények ilyenek, de ez az osztály bővebb.

Nincs a matematikában olyan tétel, amely karakterizálni tudná ezt a függvényosztályt. Vannak olyan függvények, amelyek Riemann-integrálhatóak, de nincs primitív függvényük (gondoljunk bármilyen nem azonosan konstans lépcsős függvényre), de vannak olyanok is, amelyeknek van primitív függvényük de nem Riemann-integrálhatóak, lásd Volterra példáját a 7. gyakorlatban. Ezért a Newton-Leibniz-formula matematikailag nem kerek, olyan mintha azt mondanánk, hogy "tekintsük azokat a függvényeket, amelyekre igaz a Newton-Leibniz-formula, akkor azokra igaz a Newton-Leibniz-formula".

Az alábbiakban felvázolunk egy másik elemi integrálfogalmat: a Cauchy-féle integrált. Ez a fogalom a fenti értelemben kerek: az integrálható függvények és a primitív függvénnyel rendelkező függvények halmazainak metszete éppen a folytonos függvények halmaza. A felépítés lényegesen egyszerűbb és talán természetesebb is abban az értelemben, hogy hasonlít a Lebesgue-féle integrálra, pusztán az egyenletes konvergencia helyett a pontonkénti konvergenciát kellene használnunk.

A Cauchy-integrálható függvények halmaza természetesen szűkebb, mint a Riemann-integrálhatóké, de a kivételes példák elég komplikáltak ahhoz, hogy gyakorlati szempontból a mi fogalmunk elég általános legyen, lásd a 6. gyakorlatot. A végső megoldást amúgy is a Lebesgue-integrál szolgáltatja, amely már teljes is az integrálnormára nézve.

# 1. Egyszerű függvények

Legyen a továbbiakban $[a, b]$ a számegyenes valamely véges zárt intervalluma.

**1.1 Definíció.** Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt *egyszerűnek* nevezzük, ha az $f$ függvénynek minden pontban létezik véges jobb, és bal oldali határértéke. Jelölje $S[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon egyszerű függvények halmazát. Világos, hogy $S[a, b]$ vektortér.

Azonnal látható, hogy ha $f \in S[a, b]$, akkor $f$ korlátos az $[a, b]$ intervallumon. A következőkben példákat keresünk egyszerű függvényekre.

**1.2 Definíció.** Azt mondjuk, hogy $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *lépcsős függvény* az $[a, b]$ intervallumon, ha létezik az $[a, b]$ intervallumnak olyan

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$$

felosztása, hogy $\varphi$ állandó az $(x_{k-1}, x_k)$ szakaszokon $(k = 1, \ldots, m)$.

Az alábbi állítás nyilvánvaló a definíciók alapján.

**1.3 Állítás.** *Legyen $\varphi$ lépcsős függvény az $[a, b]$ intervallumon. Akkor $\varphi \in S[a, b]$.*

Ezután függvényeknek egy viszonylag széles osztályáról mutatjuk meg, hogy az egyszerű függvények közé tartozik.

**1.4 Állítás.** *Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos és monoton. Akkor $f \in S[a, b]$.*

**Bizonyítás.** Föltehető, hogy $f$ monoton növő, és elég csak például a bal oldali határértékek létezését igazolni. Válasszunk egy $x_0 \in (a, b]$ pontot, és legyen

$$y = \sup\{f(x) : x \in [a, x_0)\}.$$

Mivel $f$ korlátos, azért $y$ véges. Legyen $\varepsilon$ adott pozitív szám. Akkor van olyan $x_1 \in [a, x_0)$, hogy $f(x_1) > y - \varepsilon$. Legyen $\delta = x_0 - x_1$. Ha most $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, akkor $f(x_1) \le f(x) \le y$, azaz $0 \le y - f(x) < \varepsilon$. Ez éppen azt jelenti, hogy

$$\lim_{x_0-} f = y,$$

azaz létezik a bal oldali határérték az $x_0$ pontban. $\square$

Mivel egy folytonos függvénynek egyaránt van jobb, és bal oldali határértéke is, azonnal adódik az alábbi állítás.

**1.5 Állítás.** $C[a,b] \subset S[a,b]$.

Természetesen fordítva általában nem igaz, hogy minden egyszerű függvény folytonos is lenne. Példa erre bármely nem azonosan állandó lépcsős függvény. Darboux-függvények körében azonban az állítás már megfordítható.

**1.6 Definíció.** Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt *Darboux-tulajdonságúnak* nevezzük, ha bármely $x_1 < x_2$ és $f(x_1) < y < f(x_2)$ (vagy $f(x_1) > y > f(x_2)$) pontokhoz van olyan $x \in [x_1, x_2]$, hogy $f(x) = y$.

A Bolzano-tétel értelmében minden folytonos függvény Darboux-tulajdonságú, fordítva azonban ez nem érvényes. Tekintsük például az

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

függvényt a $[0,1]$ intervallumon. Könnyen látható, hogy ez a függvény Darboux-tulajdonságú, de nem folytonos a 0 pontban.

Találhatunk példát olyan Darboux-függvényre is, amely egyetlen pontban sem folytonos (lásd a 2. gyakorlatot).

**1.7 Tétel.** *Legyen $f \in S[a,b]$ Darboux-tulajdonságú az $[a,b]$ intervallumon. Akkor $f \in C[a,b]$.*

**Bizonyítás.** Tekintsünk egy $x_0 \in (a,b)$ pontot, és legyen

$$y_1 = \lim_{x_0-} f\,, \qquad y_2 = \lim_{x_0+} f\,.$$

Elég igazolni, hogy $y_1 = y_2 = f(x_0)$. Tegyük fel indirekt módon, hogy például $y_1 < y_2$, és legyen $\varepsilon = y_2 - y_1$. Ekkor van olyan $\delta > 0$, hogy $x_0 - \delta < x < x_0$ mellett

$$|f(x) - y_1| < \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

továbbá $x_0 < x < x_0 + \delta$ mellett

$$|f(x) - y_2| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Ha most $x_0 - \delta < x_1 < x_0$, és $x_0 < x_2 < x_0 + \delta$, akkor az $y = 1/2(y_1 + y_2)$ jelöléssel fennáll, hogy

$$f(x_1) < y < f(x_2)\,.$$

Nincs azonban az $[x_1, x_2]$ intervallumban olyan pont, amelynek képe $y$ lenne, és ez ellentmond a Darboux-tulajdonságnak. □

Ha az $[a, b]$ intervallumon Darboux-tulajdonságú függvények halmazára bevezetjük a $D[a, b]$ jelölést, akkor az előbbi tételünk állítása a

$$C[a, b] = D[a, b] \cap S[a, b]$$

egyenlőség alakjában írható fel.

## 2. Az egyszerű függvények tere

A következő tételünkben az egyszerű függvényeket lépcsős függvényekkel jellemezzük.

**2.1 Tétel.** *Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor egyszerű, ha előáll lépcsős függvények egyenletesen konvergens sorozatának határértékeként az $[a, b]$ intervallumon.*

**Bizonyítás.** Szükségesség. Tegyük fel, hogy $f \in S[a, b]$, és legyenek $n \in \mathbb{N}$ és $x \in [a, b]$ adottak. Ekkor az $x$ pontnak van olyan $U_x$ környezete, hogy ha az $u$ és $v$ pontokat egyaránt az $x$ bal oldali (vagy jobb oldali) környezetéből választjuk, akkor

$$|f(u) - f(v)| < \frac{1}{n}\,.$$

Ekkor az $[a, b]$ kompakt intervallum

$$[a, b] \subset \bigcup_{x \in [a,b]} U_x$$

nyílt fedéséhez jutunk, amelyből kiválasztható véges befedés, legyen ez

$$U_{x_1}, \ldots, U_{x_m}\,.$$

Tegyük fel, hogy $U_{x_k} = (a_k, b_k)$, $(k = 1, \ldots, m)$, és rendezzük nagyság szerint az $a, b$, $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m, x_1, \ldots, x_m$ számokat. Jelölje ezt a rendezést

$$a = u_0 < u_1 < \ldots < u_j = b\,,$$

ahol az $a$-nál kisebb, illetve $b$-nél nagyobb számokat elhagytuk. Könnyen látható, hogy ha $u$ és $v$ ugyanazon $(u_{i-1}, u_i)$ intervallumba esnek, akkor $|f(u) - f(v)| < 1/n$.

Értelmezzük az alábbi $\varphi_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ lépcsős függvényt: $\varphi_n(u_i) = f(u_i)$, továbbá $x \in (u_{i-1}, u_i)$ esetén

$$\varphi_n(x) = f\left(\frac{u_{i-1} + u_i}{2}\right)\,,$$

ahol $i = 1, \dots, j$. Ekkor minden $x \in [a,b]$ pontban

$$|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{n},$$

és ez éppen azt jelenti, hogy $\varphi_n \to f$ egyenletesen az $[a,b]$ intervallumon.

Elégségesség. Tekintsük most lépcsős függvények egy olyan $\varphi_n$ sorozatát, amelyre $\varphi_n \to f$ egyenletesen az $[a,b]$ intervallumon. Elég megmutatni, hogy az $f$ függvénynek minden $x_0 \in (a,b]$ pontban létezik bal oldali határértéke. Legyen ezért $\varepsilon > 0$, ekkor van olyan $n$ index, hogy

$$|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

minden $x \in [a,b]$ pontban. Található továbbá olyan $\delta > 0$, amelyre

$$|\varphi_n(u) - \varphi_n(v)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

hacsak $u, v \in (x_0 - \delta, x_0)$. Tehát bármely ilyen $u, v$ pontokban

$$|f(u) - f(v)| \le |f(u) - \varphi_n(u)| + |\varphi_n(u) - \varphi_n(v)| + |\varphi_n(v) - f(v)| < \varepsilon.$$

Innen azonnal adódik, hogy az $f$ függvénynek az $x_0$ pontban létezik véges bal oldali határértéke. □

Lássuk el az $S[a,b]$ vektorteret az egyenletes konvergencia normájával, azaz minden $f \in S[a,b]$ függvényre legyen

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|. \tag{2}$$

Nyilvánvaló, hogy így normát definiáltunk.

**2.2 Tétel.** *A fenti normával $S[a,b]$ Banach-teret alkot.*

**Bizonyítás.** Ha $f_n$ Cauchy-sorozat, akkor minden $x \in [a,b]$ pontban van határértéke, legyen ez $f(x)$. Ekkor természetesen $f_n \to f$ egyenletesen az $[a,b]$ intervallumon. Másrészt a 2.1 Tétel elégségességének igazolásánal csak annyit használtunk fel, hogy $\varphi_n \in S[a,b]$, így azt bizonyítottuk, hogy egyszerű függvények egyenletes limesze is egyszerű. Tehát $f \in S[a,b]$. □

**2.3 Állítás.** *Ha $f \in S[a,b]$, akkor található olyan $H \subset [a,b]$ megszámlálható halmaz, hogy $f$ folytonos az $[a,b] \setminus H$ halmazon.*

**Bizonyítás.** A 2.1 Tétel szerint található lépcsős függvények olyan $\varphi_n$ sorozata, hogy $\varphi_n \to f$ egyenletesen az $[a,b]$ intervallumon. Másrészt minden $n$ indexre van olyan $H_n \subset [a,b]$ véges halmaz, hogy $\varphi_n$ folytonos az $[a,b] \setminus H_n$ halmazon. Következésképpen $f$ folytonos a

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

megszámlálható halmazon kívül. □

Ennek az állításnak a megfordítása természetesen nem érvényes, lásd például az (1) alatti függvényt.

# 3. Az integrál

Először lépcsős függvények integrálját értelmezzük.

**3.1 Definíció.** Tekintsünk egy $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ lépcsős függvényt, éspedig az

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$$

felosztás mellett $\varphi(x) = y_k$, ha $x \in (x_{k-1}, x_k)$, ahol $k = 1, \ldots, m$. Akkor az

$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=1}^m y_k(x_k - x_{k-1}) \in \mathbb{R}$$

vektort a $\varphi$ *integráljának* nevezzük az $[a, b]$ intervallumon.

**3.2 Állítás.** *Ha $\varphi$ és $\psi$ lépcsős függvények, akkor*

$$\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_a^b \varphi + \beta \int_a^b \psi$$

*tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ együtthatók esetén.*

**3.3 Állítás.** *Legyen $\varphi$ lépcsős függvény, akkor*

$$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi\,.$$

*bármely $a < c < b$ pont mellett.*

**Bizonyítás.** Könnyen látható, hogy $\varphi$ leszűkítése az $[a, c]$, illetve $[c, b]$ intervallumra ugyancsak lépcsős függvény, így az egyenlőség közvetlenül adódik a definícióból. □

**3.4 Állítás.** *Bármely $\varphi$ lépcsős függvényre*

$$\left| \int_a^b \varphi \right| \le \|\varphi\|(b - a).$$

**Bizonyítás.** Valóban,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \varphi\right| &= \left|\sum_{k=1}^m y_k(x_k - x_{k-1})\right| \\ &\le \sum_{k=1}^m |y_k|(x_k - x_{k-1}) \le \|\varphi\| \sum_{k=1}^m (x_k - x_{k-1}) = \|\varphi\|(b-a)\,. \ \square\end{aligned}$$

**3.5 Állítás.** *Legyen $\varphi_n$ lépcsős függvények egyenletesen konvergens sorozata az $[a,b]$ intervallumon. Akkor a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n$$

*határérték létezik és véges.*

**Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon$ adott pozitív szám. Mivel $\varphi_n$ Cauchy-sorozat az $S[a,b]$ térben, található olyan $N$ index, hogy bármely $n, k \ge N$ indexekre

$$\|\varphi_n - \varphi_k\| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Innen a 3.2 és 3.4 Állítások alapján

$$\left|\int_a^b \varphi_n - \int_a^b \varphi_k\right| \le \|\varphi_n - \varphi_k\|(b-a) < \varepsilon\,,$$

és ezzel az állításunkat igazoltuk. $\square$

Most már minden segédeszközünk megvan ahhoz, hogy az integrál fogalmát kiterjesszük az egyszerű függvények terére.

**3.6 Definíció.** Legyen $f \in S[a,b]$, és válasszunk lépcsős függvények olyan $\varphi_n$ sorozatát, amelyre $\varphi_n \to f$ egyenletesen az $[a,b]$ intervallumon. Értelmezzük az $f$ integrálját az

$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n$$

formulával az $[a,b]$ intervallumon.

**3.7 Tétel.** *Az integrál egyértelműen meghatározott.*

**Bizonyítás.** Ha $f \in S[a,b]$, akkor a 2.1 Tétel szerint található lépcsős függvények olyan $\varphi_n$ sorozata, amelyre $\varphi_n \to f$ egyenletesen az $[a,b]$ intervallumon, és ekkor a 3.5 Állítás miatt a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n$$

határérték létezik és véges. Ha pedig $\psi_n$ is ilyen sorozat, akkor bármely $\varepsilon$ pozitív számhoz található olyan $N$ index, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$\|\varphi_n - \psi_n\| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Következésképpen a 3.5 Állításra tekintettel

$$\left|\int_a^b \varphi_n - \int_a^b \psi_n\right| \leq \|\varphi_n - \psi_n\|(b-a) < \varepsilon\,,$$

azaz $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n$. Ez azt jelenti, hogy az integrál értéke független a lépcsős függvények sorozatának választásától. $\square$

Az következő állítások egyszerűen következnek a lépcsős függvényekre megfogalmazott megfelelő állításokból.

**3.8 Állítás.** *Ha $f, g \in S[a,b]$, akkor*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

*tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ együtthatókra.*

**3.9 Állítás.** *Ha $f \in S[a,b]$, akkor*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

*tetszőleges $a < c < b$ pont esetén.*

**3.10 Állítás.** *Ha $f \in S[a,b]$, akkor*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \|f\|(b-a)\,.$$

**Bizonyítás.** Legyen $\varphi_n$ lépcsős függvények olyan sorozata, amelyre $\varphi_n \to f$ egyenletesen az $[a,b]$ intervallumon. Válasszunk egy $\varepsilon$ pozitív számot tetszőlegesen, ehhez van olyan $N$ index, hogy $\|\varphi_n\| \leq \|f\| + \varepsilon$, hacsak $n \geq N$. Ekkor a 3.4 Állítás folytán

$$\left|\int_a^b \varphi_n\right| \leq (\|f\| + \varepsilon)(b-a)\,,$$

azaz

$$\left|\int_a^b f\right| \le (\|f\| + \varepsilon)(b-a)\,.$$

Mivel $\varepsilon$ tetszőleges volt, innen azonnal adódik az állítás. $\square$

**3.11 Tétel.** *Ha $f_n \to f$ az $S[a,b]$ térben, akkor*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f\,.$$

**Bizonyítás.** A tételünk állítása közvetlenül következik az

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \le \|f_n - f\|(b-a)$$

egyenlőtlenségből. $\square$

# 4. A Newton-Leibniz-formula

Legyen az alábbiakban $[a,b]$ véges, zárt intervallum, és tekintsünk egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egyszerű függvényt.

**4.1 Definíció.** Az $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f$ függvényt az $f$ *integrálfüggvényének* nevezzük az $[a,b]$ intervallumon.

**4.2 Állítás.** *Az integrálfüggvény folytonos.*

**Bizonyítás.** Valóban, tetszőleges $u, v \in [a,b]$ pontokban

$$|F(u) - F(v)| = \left|\int_a^u f - \int_a^v f\right| = \left|\int_u^v f\right| \le \|f\| \cdot |u-v|\,,$$

ahonnan adódik az állítás. $\square$

**4.3 Tétel.** *Ha $f \in S[a,b]$ folytonos az $x$ pontban, akkor az $F$ integrálfüggvény differenciálható az $x$ pontban, és $F'(x) = f(x)$.*

**Bizonyítás.** Elég belátni, hogy

$$\lim_{v\to 0}\left|\frac{F(x+v) - F(x)}{v} - f(x)\right| = 0\,.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Akkor van olyan $\delta > 0$, hogy minden $|v| < \delta$ mellett $|f(x+v) - f(x)| < \varepsilon$. Ekkor

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(x+v) - F(x)}{v} - f(x) \right| \\ = & \left| \frac{1}{v} \left( \int_a^{x+v} f - \int_a^x f \right) - f(x) \right| = \frac{1}{|v|} \left| \int_x^{x+v} (f - f(x)) \right| \\ \leq & \frac{1}{|v|} \varepsilon |v| = \varepsilon \,, \end{aligned}$$

amit bizonyítáni akartunk. □

**4.4 Tétel.** *Legyen $f \in S[a,b]$, és jelentse $F$ az integrálfüggvényét. Akkor van olyan $H$ megszámlálható halmaz, hogy $F$ differenciálható az $[a,b] \setminus H$ halmazon, és*

$$F'(x) = f(x)$$

*minden $x \in [a,b] \setminus H$ pontban.*

**Bizonyítás.** A tételünk a 2.3 Állítás és a 4.3 Tétel következménye. □

Tekintsünk ezután egy tetszőleges $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt.

**4.5 Definíció.** Azt mondjuk, hogy a $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény a $g$ *primitív függvénye*, ha $G'(x) = g(x)$ minden $x \in [a,b]$ pontban.

**4.6 Tétel.** *Ha a $g$ valós értékű függvénynek van primitív függvénye, akkor $g$ Darboux-tulajdonságú.*

**Bizonyítás.** Jelölje $G$ a $g$ primitív függvényét. Válasszunk ki $x_1 < x_2$ pontokat az $[a,b]$ intervallumból, és tegyük fel, hogy $g(x_1) < \alpha < g(x_2)$. Tekintsük az

$$F(x) = G(x) - \alpha x$$

differenciálható függvényt. Ekkor $F$ folytonos is, így felveszi a minimumát az $[x_1, x_2]$ intervallumon. Ez nem lehet az $x_1$ pontban, mert $F'(x_1) < 0$, ezért itt $F$ lokálisan fogyó, de nem lehet az $x_2$ pontban sem, mert $F'(x_2) > 0$, így itt $F$ lokálisan növő. Tehát $F$ a minimumát az $[x_1, x_2]$ valamely $x$ belső pontjában éri el, ahol $F'(x) = 0$, azaz $g(x) = \alpha$. Ez éppen azt jelenti, hogy $g$ Darboux-függvény. □

**4.7 Tétel.** *Az $f \in S[a,b]$ valós értékű függvénynek akkor és csak akkor van primitív függvénye, ha $f \in C[a,b]$.*

**Bizonyítás.** Az elégségesség azonnal adódik a 4.3 Tételből. A szükségesség az előző tétel, és az 1.7 Tétel folyománya. □

**4.8 Következmény.** **(Newton-Leibniz-formula)** *Legyen $f \in C[a,b]$, és jelölje $F$ az $f$ primitív függvényét. Akkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

**Bizonyítás.** Ha $G$ az $f$ integrálfüggvénye az $[a,b]$ intervallumon, akkor a 4.3 Tétel következtében $F'(x) = G'(x)$ minden pontban, és így $F - G$ állandó az $[a,b]$ intervallumon. □

**Záró megjegyzések**

A Cauchy-integrál felépítése egy kicsit más szóhasználattal összefoglalható az alábbi módon is.

Tekintsük az $S[a,b]$ Banach-teret az egyenletes konvergencia normájával. A 2.1 Tétel szerint ebben a Banach-térben a lépcsős függvények sűrű alteret alkotnak. Ezen az altéren az integrált folytonos lineáris funkcionálként értelmeztük. Ez a funkcionál a folytonosság és a norma megtartásával egyértelműen terjeszthető ki az egész $S[a,b]$ térre.

# 5. Gyakorlatok

1. Mutassuk meg, hogy egy Darboux-függvénynek nem lehet elsőfajú szakadása (vesd össze az 1.7 Tétellel).

2. Irjuk fel a $[0,1]$ intervallum pontjait tizedes törtekként, majd váltsuk át ezeket kettes számrendszerbe. Ekkor olyan

   $$x = 0.a_1a_2a_3\dots$$

   számokhoz jutunk, hogy az $a_k$ jegyek mindegyike 0, vagy 1. (Az egyértelmű felírás miatt föltehetjük, hogy ezek között nincs olyan szám, amelyik valamely helyértéktől kezdve csak egyeseket tartalmaz.) Tekintsük a következő függvényt:

   $$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \dots + a_n}{n}, & \text{ha ez a határérték létezik,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

   Igazoljuk, hogy $f$ Darboux-tulajdonságú, de a $[0,1]$ intervallum egyetlen pontjában sem folytonos.

3. Ha adott az $[a,b]$ intervallum egy tetszőleges $H$ megszámlálható részhalmaza, vajon van-e olyan egyszerű függvény, amelynek éppen $H$ a szakadási pontjainak halmaza? Ha igen, adjunk példát ilyen függvényre. (Lásd a 2.3 Állítást.)

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $\varphi$ és $\psi$ valós értékű lépcsős függvények, és $\varphi(x) \leq \psi(x)$ minden $x \in [a, b]$ pontban, akkor
$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi \,.$$
Nevezetesen
$$\left| \int_a^b \varphi \right| \leq \int_a^b |\varphi| \,.$$

5. Az előző gyakorlat segítségével igazoljuk, hogy ha $f$ és $g$ valós értékű egyszerű függvények, továbbá $f(x) \leq g(x)$ minden $x \in [a, b]$ pontban, akkor
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \,.$$
Nevezetesen
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \,.$$

6. Tekintsük a $C$ Cantor-halmazt a $[0, 1]$ intervallumban. Ha $(a, b)$ olyan nyílt részintervallum, amelyet a $C$ konstrukciója során a $[0, 1]$-ből kivágtunk, akkor ennek bal oldalán legyen
$$f(x) = \sin \frac{1}{x - a} \,,$$
a jobb oldalán pedig legyen
$$f(x) = \sin \frac{1}{x - b} \,,$$
továbbá a két görbét kössük össze úgy, hogy $f$ folytonos legyen az $(a, b)$ intervallumon. A $C$ pontjaiban $f$ legyen nulla. Mutassuk meg, hogy $f \notin S[0, 1]$, de $f$ Riemann-integrálható a $[0, 1]$ intervallumon (ugyanis éppen a $C$ halmaz lesz a szakadási pontjainak halmaza).

7. Készítsük el a Cantor-halmaz mintájára azt a $D$ halmazt, amelyet úgy nyerünk a $[0, 1]$ intervallumból kiindulva, hogy mindig az intervallumok középső negyedét távolítjuk el. Ezután készítsük el analóg módon az előző gyakorlatban leírt $f$ függvényt.

   Gondoljuk meg, hogy az $f$ függvénynek van primitív függvénye, de $f$ nem Riemann-integrálható, hiszen $f$ szakadási pontjainak halmaza éppen $D$, amely $1/2$ mértékű.

8. Tegyük fel, hogy az $f_n \in S[a, b]$ sorozat monoton növő, és $f_n \to f$ az $[a, b]$ minden pontjában. Ellenőrizzük, hogy ekkor $f \in S[a, b]$, továbbá
$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f \,.$$

9. Keressünk példát olyan pontonként konvergens $f_n \in S[a,b]$ függvénysorozatra, amelynek $f$ határértékére $f \in S[a,b]$, de
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n \neq \int_a^b f\,,$$
illetve olyan sorozatra is, amelyre $f$ még csak nem is egyszerű függvény.

10. Mutassuk meg, hogy ha $f \in S[a,b]$, akkor $f$ Riemann-integrálható, és $\int_a^b f$ megegyezik az $f$ Riemann-integráljával az $[a,b]$ intervallumon. (Útmutatás: ellenőrizzük az állítást először lépcsős függvényekre, majd terjesszük ki egyszerű függvényekre.)